

問題 1

- (1) 省略
 (2) 省略
 (3)

1	(1)	A	H.
2	(2)	$\neg A$	H.
1,2	(3)	\perp	1,2, \neg -E
1	(4)	$\neg\neg A$	2-3, \neg -I
	(5)	$A \rightarrow \neg\neg A$	1-4, \rightarrow -I

(4)

1	(1)	$(A \wedge B) \vee C$	H.
2	(2)	$A \wedge B$	H.
2	(3)	A	2, \wedge -E
2	(4)	$A \vee C$	3, \vee -I
2	(5)	B	2, \wedge -E
2	(6)	$B \vee C$	5, \vee -I
2	(7)	$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$	4,6, \wedge -I
8	(8)	C	H.
8	(9)	$A \vee C$	8, \vee -I
8	(10)	$B \vee C$	8, \vee -I
8	(11)	$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$	9,10, \wedge -I
1	(12)	$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$	1, 2-7,8-11, \vee -E
	(13)	$(A \wedge B) \vee C \rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$	1-12, \rightarrow -I

(5)

(1)	$(A \vee C) \wedge (B \wedge C)$	H
(2)	$A \vee C$	1, \wedge -E
(3)	AH.	
(4)	$B \vee C$	H.
(5)	B	H.
(6)	$A \wedge B$	3,5, \wedge -I
(7)	$(A \wedge B) \vee C$	6, \vee -I
(8)	C	H.
(9)	$(A \wedge B) \vee C$	8, \vee -I
(10)	$(A \wedge B) \vee C$	4, 5-7,8-9, \vee -E
(11)	C	H.
(12)	$(A \wedge B) \vee C$	11, \vee -I
(13)	$(A \wedge B) \vee C$	2,3-10,11-12, \vee -E
(14)	$(A \vee C) \wedge (B \wedge C) \rightarrow (A \wedge B) \vee C$	1-13, \rightarrow -I

問題 2

(1) 省略

(2)

1	(1)	$A \vee B$	H.
2	(2)	$\neg A \wedge \neg B$	H
3	(3)	A	H.
2	(4)	$\neg A$	2, \wedge -E
2,3	(5)	\perp	3,4, \neg -E
6	(6)	B	H
2	(7)	$\neg B$	2, \wedge -E
2,6	(8)	\perp	6,7, \neg -E
1,2	(9)	\perp	1,3-5,6-8, \vee -E
1	(10)	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	2-9, \neg -I
	(11)	$A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$	1-11, \rightarrow -I
12	(12)	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	H.
	(13)	$A \vee \neg A$	(この証明は略)
14	(14)	A	H
14	(15)	$A \vee B$	14, \vee -I
16	(16)	$\neg A$	H.
17	(17)	$\neg B$	H.
16,17	(18)	$\neg A \wedge \neg B$	16,17, \wedge -I
1,16,17	(19)	\perp	1,17, \neg -E
1,16	(20)	$\neg\neg B$	17-19, \neg -E
1,16	(21)	B	20, $\neg\neg$ -E
1,16	(22)	$A \vee B$	21, \vee -I
1	(23)	$A \vee B$	13, 14-15, 16-22, \vee -E
	(24)	$\neg(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow A \vee B$	12-23, \rightarrow -I
	(25)	$A \vee B \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$	11,24, \leftrightarrow の定義

(3)

1	(1)	A	Ass.
2	(2)	$\neg A \vee B$	H
2	(3)	$\neg A$	2, \wedge -E
1,2	(4)	\perp	1,3, \neg -E
1	(5)	$\neg(\neg A \wedge B)$	2-4, \neg -I

(4)

1	(1)	$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)$	H.
2	(2)	A	H.
1	(3)	$A \rightarrow B$	1, \wedge -E
1,2	(4)	B	2,3, \rightarrow -E
1	(5)	$A \rightarrow \neg B$	1, \wedge -E
1,2	(6)	$\neg B$	2,3, \rightarrow -E
1,2	(7)	\perp	4,6, \neg -E
1	(8)	$\neg A$	2-7, \neg -I
	(9)	$((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow \neg A$	1-8, \rightarrow -I

問題 3

(1) 問題 2 の (2) を参照

(2) 問題 2 の (2) を参照

(3)

1	(1)	$A \rightarrow B$	H.
2	(2)	$\neg(A \vee \neg A)$	H.
3	(3)	A	H.
3	(4)	$A \vee \neg A$	3, \vee -I
2,3	(5)	\perp	2,4, \neg -E
2	(6)	$\neg A$	3-5, \neg -I
2	(7)	$A \vee \neg A$	6, \vee -I
2	(8)	\perp	2,7, \neg -E
	(9)	$\neg\neg(A \vee \neg A)$	2-8, \neg -I
	(10)	$A \vee \neg A$	9, $\neg\neg$ -E
11	(11)	A	H.
1,11	(12)	B	1,11, \rightarrow -E
1,11	(13)	$\neg A \vee B$	12, \vee -I
14	(14)	$\neg A$	H.
14	(15)	$\neg A \vee B$	14, \vee -I
1	(16)	$\neg A \vee B$	10,11-13,14-15, \vee -E
	(17)	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$	1-16, \rightarrow -I

(4)

1	(1)	$\neg(A \wedge B)$	H.
	(2)	$A \vee \neg A$	(この証明は略)
3	(3)	A	H.
4	(4)	B	H.
3,4	(5)	$A \wedge B$	3,4, \wedge -I
1,3,4	(6)	\perp	1,5, \neg -E
1,3	(7)	$\neg B$	4-6, \neg -I
1,3	(8)	$\neg A \vee \neg B$	7, \vee -I
9	(9)	$\neg A$	H.
9	(10)	$\neg A \vee \neg B$	9, \vee -I
1	(11)	$\neg A \vee \neg B$	2, 3-8, 9-10, \vee -E
	(12)	$\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$	1-11, \rightarrow -I

(5)

1	(1)	$\neg A \rightarrow B$	H.
2	(2)	$\neg B$	H.
3	(3)	$\neg A$	H.
1,3	(4)	B	1,3, \rightarrow -E
1,2,3	(5)	\perp	2,4, \neg -E
1,2	(6)	$\neg\neg A$	3-5, \neg -I
1,2	(7)	A	6, $\neg\neg$ -E
1	(8)	$\neg B \rightarrow A$	2-7, \rightarrow -I
	(9)	$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$	1-8, \rightarrow -I

(6) 簡単なので略

問題 4

(1)

1	(1)	$\neg A \vee B$	H.
2	(2)	$\neg A$	H.
3	(3)	$\neg B$	H.
4	(4)	A	H
2,4	(5)	\perp	2,4, \neg -E
2,4	(6)	$\neg\neg B$	3-5, \neg -I
2,4	(7)	B	6, $\neg\neg$ -E
2	(8)	$A \rightarrow B$	4-7, \rightarrow -I
9	(9)	B	H.
9	(10)	$A \rightarrow B$	9, \rightarrow -I
1	(11)	$A \rightarrow B$	1,2-8,9-10, \vee -E
	(12)	$(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$	1-11, \rightarrow -I

(2) 省略

(3) 省略

(4)

1	(1)	$\neg A \vee \neg B$	H.
2	(2)	$A \wedge B$	H.
3	(3)	$\neg A$	H.
2	(4)	A	2, \wedge -E
2,3	(5)	\perp	3,4, \neg -E
6	(6)	$\neg B$	H.
2	(7)	B	2, \wedge -E
2,6	(8)	\perp	6,7, \neg -E
1,2	(9)	\perp	1,3-5,6-8, \vee -E
1	(10)	$\neg(A \wedge B)$	2-9, \neg -I
	(11)	$(\neg A \vee \neg B) \rightarrow (\neg(A \wedge B))$	1-10, \rightarrow -I

(5)

1	(1)	$\neg(A \vee B)$	H.
2	(2)	A	H.
2	(3)	$A \vee B$	2, \vee -I
1,2	(4)	\perp	1,3, \neg -E
1	(5)	$\neg A$	2-4, \neg -I
6	(6)	B	H.
6	(7)	$A \vee B$	6, \vee -I
1,6	(8)	\perp	1,7, \neg -E
1	(9)	$\neg B$	6-8, \neg -I
1	(10)	$\neg A \wedge \neg B$	5,9, \wedge -I
	(11)	$\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	

(6)

1	(1)	$\neg A \wedge \neg B$	H.
2	(2)	$A \vee B$	H.
3	(3)	A	H.
1	(4)	$\neg A$	1, \wedge -E
1,3	(5)	\perp	3,4, \neg -E
6	(6)	B	H.
1	(7)	$\neg B$	1, \wedge -E
1,6	(8)	\perp	6,7, \neg -E
1,2	(9)	\perp	2, 3-5,6-8, \vee -E
1	(10)	$\neg(A \vee B)$	2-9, \neg -I
	(11)	$(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$	1-10, \rightarrow -I

(7) 問題 1 の (5) 参照

(8)

1	(1)	$A \rightarrow \neg B$	Ass.
2	(2)	B	H.
3	(3)	A	H
1,3	(4)	$\neg B$	1,3, \rightarrow -E
1,2,3	(5)	\perp	2,4, \neg -E
1,2	(6)	$\neg A$	3-5, \neg -I
1	(7)	$B \rightarrow \neg A$	2-6, \rightarrow -I

(9)

1	(1)	$\neg\neg(A \rightarrow B)$	Ass.
2	(2)	A	Ass.
3	(3)	$\neg B$	H.
1	(4)	$A \rightarrow B$	1, $\neg\neg$ -E
1,2	(5)	B	2,4, \rightarrow -E
1,2,3	(6)	\perp	3,5, \neg -E
1,2	(7)	$\neg\neg B$	3-6, \neg -I

(10) 問題修正 $\neg\neg A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B$

1	(1)	$\neg\neg A \rightarrow B$	Ass.
2	(2)	A	H.
3	(3)	$\neg A$	H.
2,3	(4)	<i>perp</i>	2,3, \neg -E
2	(5)	$\neg\neg A$	3-2, \neg -I
1,2	(6)	B	1,5, \rightarrow -E
1	(7)	$A \rightarrow B$	2-6, \rightarrow -I

(11)

1	(1)	$\neg\neg\neg A$	H.
2	(2)	A	H.
1	(3)	$\neg A$	1, $\neg\neg$ -E
1,2	(4)	\perp	2,3, \neg -E
1	(5)	$\neg A$	2-4, \neg -I
	(6)	$\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$	1-5, \rightarrow -I

(12)

1	(1)	$\neg A$	H.
2	(2)	$\neg\neg A$	H.
1,2	(3)	\perp	1,2, \neg -E
1	(4)	$\neg\neg\neg A$	2-3, \neg -I
	(5)	$\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$	1-4, \rightarrow -I

問題 5

(1) 省略

(2)

1	(1)	$(A \vee B) \rightarrow C$	H.
2	(2)	A	H.
2	(3)	$A \vee B$	2, \vee -I
1,2	(4)	C	1,3, \rightarrow -E
1	(5)	$A \rightarrow C$	2-4, \rightarrow -I
6	(6)	B	H.
6	(7)	$A \vee B$	6, \vee -I
1,6	(8)	C	1,7, \rightarrow -E
1	(9)	$B \rightarrow C$	6-8, \rightarrow -I
1	(10)	$(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$	5,9, \wedge -I
	(11)	$((A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$	1-10, \rightarrow -I

(3)

1	(1)	$\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$	H.
2	(2)	$\neg(A \rightarrow B)$	H.
3	(3)	A	H.
4	(4)	$\neg A$	H.
3,4	(5)	\perp	3,4, \neg -E
3	(6)	$\neg\neg A$	4-5, \neg -I
	(7)	$A \rightarrow \neg\neg A$	3-6, \rightarrow -I
8	(8)	A	H.
8	(9)	$\neg\neg A$	7,8, \rightarrow -E
1,8	(10)	$\neg\neg B$	1,9, \rightarrow -E
1,8	(11)	B	10, \neg -E
1	(12)	$A \rightarrow B$	8-11, \rightarrow -I
1,2	(13)	\perp	2,12, \neg -E
1	(14)	$\neg\neg(A \rightarrow B)$	2-13, \neg -I
	(15)	$(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg\neg(A \rightarrow B)$	1-14, \rightarrow -I

(4) 省略

(5)

1	(1)	$A \rightarrow (A \rightarrow B)$	H.
2	(2)	A	H.
1,2	(3)	$A \rightarrow B$	1,2, \rightarrow -E
1,2	(4)	B	2,3, \rightarrow -E
1	(5)	$A \rightarrow B$	
	(6)	$(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$	1-5, \rightarrow -I