論理学—第二部　述語論理

# 1 一階の言語

## 1.1 一階の言語で使われる様々な記号

命題論理は、われわれが現実に行っている推論を形式化し、その妥当性をチェックするための枠組を与えるものであるが、いかんせん、その表現力にはかなりの制約がある。命題論理では、否定詞や接続詞に注目し、それらの一部を論理結合子として推論の構造を分析した。しかし、そのやり方では、数学やその他の場面で現実に正しいとされる多くの推論を分析することはできない。たとえば、「二乗したすべての数は正であり、9 は二乗した数である、ゆえに 9 は正である」のような推論は、命題論理では '$\varphi \wedge \psi \to \sigma$' としか表現できない。われわれはこのような推論が正しいという直観をもっているが、この形式化ではその妥当性をチェックするための手掛かりがまったく示されておらず、そのためにその正しさを命題論理では表現できないのである。

上の例のような推論の妥当性をとらえるには、否定詞や接続詞を含まない命題を単に一つの文字（命題記号）で置き換えるのではなく、個々の命題の内部構造にまで踏み込んで命題の形式化を行う必要がある。その際の基本的な発想は、「個々のものないし対象」と「それらのものがもつ性質やそれらのものの間の関係」を区別し、それら二種のカテゴリーの組み合わせとして基礎的な命題の構造をとらえる、というものである。具体的には、

1. 対象 a は性質 P をもつ
2. 対象 a と b の間に関係Rがなりたつ

といった形式の命題を原子命題と考え、そこから論理結合子と量化子とによって複合命題を構成するのである。

では、量化子とはなにか。実際の推論では、個々の対象についてなにごとかを述べるだけでなく、ある範囲の対象全体（議論の領域）のすべてについて、あるいは対象全体のうちのいくつかについてなにごとかを主張する場合がある。例えば「すべての偶数は二つの素数の和である」とか、「その平方が 2 であるような実数が存在する」といった命題がそれである。このような命題を表現するために、一階の言語では全称量化子と存在量化子の二つを導入する[1]。

以下、一階の言語で使われる表現のリストを提示する。

| | |
|---|---|
| 述語記号 | $P_1, P_2, \ldots, =$ |
| 関数記号 | $f_1, f_2, \ldots$ |
| 定項記号 | $a, b, c, \ldots, a_1, a_2, \ldots$ |
| 変項 | $x, y, z, \ldots, x_1, x_1, \ldots$ |
| 論理結合子 | $\vee, \wedge, \to, \neg, \leftrightarrow, \perp$ |
| 量化子 | $\forall, \exists$ |
| 補助記号 | $(, )$ |

いくつかの注意。（1）これらの記号はしばしば論理記号 logical symbols と非論理記号（あるいはパラメータ）とに分類されることがある。通常の分類では、述語記号から定項までが非論理記号で、変項から量化子までが論理記号とされる。ただし、その場合 = をどちらに分類するかは意見の分かれるところである[2]。

（2）述語記号としてあげた $P_1, P_2, \ldots$ のそれぞれには実はアリティというものが付属する。述語ということで、ここでは関係をも含む広い概念を意味している。関係には「$x$ は $y$ より大きい」のような二項関係もあれば、

[1] 自然言語において量化子 quantifier は、もっと一般的に「量を表わす表現」と考えられる。例えば、「たくさんの」とか「たいていの」、「ちょうど二つの」、「唯一つの」、「三つ以下の」などはいずれも、ある範囲の対象についてそれらの量を表わすと考えられる。これに対しわれわれの形式言語では二つの量化子しかない。しかし、「たいていの」のようなあいまいさを含む表現は別だが、それ以外の「ちょうど二つの」のような表現は、全称量化子と存在量化子プラス等号によって一階の言語で表現できるのである。この点は後で詳しくみる。

[2] これを問題にすると、そもそも論理記号とは何かという問題、さらに論理定項とは何かといった問題を扱わなくてはならなくなる。この点については時間があれば最後に触れる。

「$x$ は $y$ と $z$ の間にある」のような三項関係もある。そして述語は関係の特別な場合、一項関係だと考えるのである。したがって、各述語記号は具体的な応用場面で個々にそれが何項関係であるのかを特定しなくてはならない。その項数のことをアリティと呼ぶ。例えば等号のアリティは2である。

（3）関数記号は、通常の関数を表す記号である。具体的には $x^2$ や $x+y$ のようなものをイメージすればよい。したがって、関数にもアリティがある。また、日常の表現にも関数に相当する表現はある。例えば、「$x$ は太郎の父親である」といった表現は関数表現と考えられる。通常の数学の関数と日常語の関数表現に共通するのは何か。これらは、表現の変項に（議論の領域の）何らかの対象の名前が代入されると、再び議論領域のある対象をピックアップするような表現である。その働きは「$x$ は $y$ より大きい」と比べてみるとはっきりするだろう。後者の変項に（議論の領域の）何らかの対象の名前が代入されると、今度は対象を表わす表現ではなく、真偽の評価が下される命題ないし文が出来上がるのである。

（4）最後の注意。以上に示した記号のリストのうち、非論理記号とされるものは、具体的にどの言語を形式化するかに応じて変化することに注意してほしい。算術の言語を構成するのか、日常の推論を形式化するのかに応じて、非論理記号は違った形で解釈される。したがって、一階の言語というのは単一の言語ではない。複数の様々な一階の言語があってよいのである。そして、上のリストはそうした個々の一階の言語を構成、形式化するにあたっての枠組みを示しているのである。

## 1.2 量化子

次に、量化子が実際にどのように使われるか、量化子を用いた命題の形式化について見てゆく。まず、もっとも基本となる（量化を含む）命題の形を検討しよう。いま、適当な日本語の断片を題材にすることにして、そこでは‘$Hx$’ が「$x$ は（が）人間である」を、‘$Ax$’ が「$x$ は（が）動物である」を、‘$Sx$’ が「$x$ は（が）学生である」を、そして $a$ は「ソクラテス」という固有名を表わすとする。そうすると、例えば「ソクラテスは人間である」は‘$Ha$’ と表記できるようになる。その上で、

1. 「すべての人間は動物である」は $\forall x(Hx \to Ax)$
2. 「ある人間は学生である」は $\exists x(Hx \land Sx)$

と形式化される。ここで例えば（1）を $\forall x(Hx \land Ax)$ のように形式化するのはマズイ。というのも、この式は「すべてのものは人間であり、かつ動物である」を表わしており、元の「すべての人間は動物である」が現実世界において真であるのに対し、この文はあきらかに偽だからである。

**問題 1** *(2)* の翻訳として $\exists x(Hx \to Sx)$ はなぜマズイか。

量化表現の論理式への翻訳はある程度まで慣れの問題である。少し練習をしてみよう[3]。

**問題 2** 次の言明を形式化しなさい。ただし、$b$、$c$ をそれぞれ「ボブ」、「ケーシー」とし、$Mx$、$Nx$、$Rx$ を一項述語「$x$ は機械工である」、「$x$ は看護婦である」、「$x$ は指輪である」とし、$Lxy$、$Txy$ を二項述語「$x$ は $y$ を愛している」、「$x$ は $y$ より背が高い」であるとし、$Gxyz$ を三項述語「$x$ は $y$ に $z$ をあげる」として解釈する。また量化子は「すべてのもの」の上を走るとする。

(a) ケーシーは機械工である。
(b) ボブは機械工である。
(c) ケーシーとボブは機械工である。
(d) ケーシーまたはボブは機械工である。
(e) ケーシーは機械工または看護婦である。

[3]以下の問題は、John Nolt, Dennis Rohatyn 現代論理学 (I) オーム社によっている。

(f) もしケーシーが機械工ならば、彼女は看護婦ではない。

(g) ケーシーはボブより背が高い。

(h) ボブはケーシーを愛している。

(i) ボブは自分自身を愛している。

(j) ボブはすべてのものを愛している。

(k) すべてのものがボブを愛している。

(l) すべてのものが自分自身を愛している。

(m) あるものは自分自身を愛している。

(n) ケーシーが愛していないものがある。

(o) ボブとケーシーの両方が愛しているものがある。

(p) ボブが愛しているものがあり、またケーシーが愛しているものがある。

(q) ケーシーはボブに何かをあげた。

(r) ボブはケーシーに指輪をあげた。

(s) すべてのものがすべてのものを愛している。

(t) あるものはあるものを愛している。

(u) すべてのものを愛しているような、あるものが存在する。

(v) どんなものも、何かあるものに愛されている。

(w) もしボブが自分自身を愛しているならば、彼は何かを愛している。

(x) もしボブが自分自身を愛していないならば、彼は何も愛していない。

(y) 任意の三つの対象について、もし第一の対象が第二の対象よりも背が高く、第二の対象が第三の対象よりも背が高いならば、第一の対象は第三の対象よりも背が高い。

以上の練習問題から引き出すべき教訓は以下の通りである。

1. 異なる変項は必ずしも異なる対象を意味しない。例えば、上の (s) $\forall x \forall y Lxy$ において、$x$ が愛しているもの $y$ には他のすべてのものだけでなく、$x$ 自身も含まれる。
2. 変項として何を選ぶかはどうでもよい。例えば (m) は、$\exists x Lxx$ でも $\exists y Lyy$ でも、$\exists z Lzz$ でもいずれでもよい。
3. 問題の (p) を参照されたい。この場合、異なる存在量化子によって表わされる対象は（たとえ同じ $x$ を用いていても）それぞれの場合に同じ対象を必ずしも指示しない。
4. 全称量化子と存在量化子の組み合わせに注意すべきである。順序が異なれば意味が変わってしまう。
5. これに対し、同じ全称量化子（存在量化子）同士の組み合わせの場合は、順序は変更できる。

集合論の言語を使ってもう少し複雑な例を考えてみよう。いま '$\forall$' がすべての集合の上を走るとし、また「$x$ は $y$ のメンバーである」を $x \in y$ で表わすことにする。

**Example 1** すべての集合がそのメンバーであるような集合は存在しない

これを翻訳するには次のように段階的にやってゆけばよい。

$\neg$［すべての集合がそのメンバーであるような集合が存在する ］

$\neg \exists x$［すべての集合は $x$ のメンバーである］

$\neg \exists x \forall y (y \in x)$

**Example 2** 任意の二つの集合について、それらのみをメンバーとするような集合が存在する

同様に段階的にやってゆこう。

$\forall x_1 \forall x_2$ ［$x_1$ と $x_2$ のみをメンバーとするような集合が存在する］

$\forall x_1 \forall x_2 \exists y$ ［$y$ は $x_1$ と $x_2$ のみをメンバーとする］

$\forall x_1 \forall x_2 \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z = x_1 \vee z = x_2)$

次に自然数論の言語から例をとろう。ここでは $\forall$ は「すべての自然数」の上を走るものとする。そして、二項述語としては、等号の他に $<$ をもち、一項関数として $S, +, \times,$ を、個体定項として $0$ をもつとする。このとき、自然数 $2$ の名前はターム $SS0$ としてこの言語では表現される。

**Example 3** ゼロでないどの自然数もある数の後続者である。

これを翻訳するにはまず、
$\forall x$[ もし $x$ がゼロでないならば、 $x$ はある数の後続者である ]
とし、次にこれを
$\forall x[(x \neq 0) \rightarrow \exists y(x = Sy)]$
のようにすればよい。

**Example 4** 自然数からなる空でないどの集合も最小元をもつ

これは、われわれの自然数論の言語には翻訳できない。なぜなら、「どの集合」という表現を一階の自然数論の言語では形式化できないからである。これをうまく表現するには、一階の集合論の言語のようなものか、二階の自然数論の言語が必要になる。

さて、以上で具体例は終わって、もう少し実質的な内容に入ろう。

## 1.3 ターム

以下で用いる記号をもう一度整理しておく。

| | |
|---|---|
| 述語記号 | $P_1, P_2, \ldots, =$、これに加えて $\in, <$ |
| 関数記号 | $f_1, f_2, \ldots$、これに加えて $S, +, \times$ など |
| 定項記号 | $a, b, c, \ldots, a_1, a_2, \ldots$、これに加えて $0$ |
| 変項 | $x, y, z, \ldots, x_1, x_1, \ldots$ |
| ターム | $t, s, \ldots$ |
| 論理結合子 | $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg, \leftrightarrow, \perp$ |
| 量化子 | $\forall, \exists$ |
| 補助記号 | $(, )$ |

上の表でこれまでと異なるのは、タームの欄である。タームとは、自然言語で言えば名詞や代名詞であり、ある対象を名指す表現と解釈される。われわれの言語では、タームは、定項、変項、およびそれらから関数記号によって作られる表現の総称である。

**定義 1** タームの集合は以下を満たす最小の集合である。

*1.* 定項と変項はタームである。

*2.* $f$ を $n$-項関数とし、$t_1, \ldots, t_n$ をタームとするとき、$f(t_1, \ldots, t_n)$ はタームである。

## 1.4　式と文

例えば$\forall x(Fx \to Gx)$という命題を考えてみよう。この命題の構成樹を考えると、その前段階ではまず$Fx \to Gx$が構成されなければならない。しかしこの表現は有意味な命題・文とは考えられない。変項を含んでいるからである。しかしながら、もとの$\forall x(Fx \to Gx)$は変項を含んではいるが有意味な文と考えられる。

われわれの論理学の体系では、文のようなものだけではなく、$Fx \to Gx$のようなものも登場させる必要があるから、それらを含めた全体を呼ぶのに文ではなく、式（整式 well-formed formula）という言い方を採用する。以下、式の定義を述べる。

**定義 2** 式の集合とは、以下の条件を満たす最小の集合である。

1. 原子式とは$P(t_1, \ldots t_n)$の形の式であり、ただし、$P$は$n$-項述語、$t_1, \ldots t_n$はタームであるとする。
2. 原子式は式である。
3. $\varphi$と$\psi$を式とするとき、$\varphi \wedge \psi, \varphi \to \psi, \varphi \vee \psi, \neg varphi, \forall x\varphi, \exists x\varphi$は式である。（ただし、最後の二つにおいて、$\varphi$の中に$\forall x$と$\exists x$は含まれないとする。）

## 1.5　自由変項と束縛変項

とはいえ、このようにして式という文より広義の表現領域を確保したとしても、その中でどれが文でどれが文でないかを見分ける手続きはまだ与えられない。その表現が変項を含むか否かという基準では文とそうでないものを見分けることはできないのである。

そこでまず、量化子のスコープというものを考えよう。量化子のスコープとは、直観的には量化子の作用の及ぶ範囲のことである。例えば、$\forall x \quad (Fx \quad \to Gx \quad)$　において、頭にある全称量化子はその後に続くカッコ内全体に作用すると考えられる。これに対し、$\forall xFx \to Gx$においては、頭にある全称量化子の作用域は直後の$Fx$だけであろう。したがって、量化子のスコープを次のように定義できる。

> 量化子のスコープとは、量化子の直後のもっとも短い式である。ただし、直後にカッコがある場合は、カッコ内全体とする。

その上で、量化子のスコープ内にあって、その量化子に付属する変項と同じ変項は（その量化子によって）束縛された変項、束縛変項 bound variable と呼ばれる。そして束縛変項以外の変項を自由変項と定義する。このとき、文とは、自由変項をもたない式と定義できる。

**問題 3** 次のうち、文はどれか、また、文でないとされるものに含まれる自由変項はどれか。

1. $\forall x(Fx \to Gy)$
2. $Fa \wedge Gb$
3. $\forall x(Fx \to \exists yGy)$
4. $\forall xFx \to \exists yRxy$

## 1.6　一階の論理における導出

一階の古典論理の自然演繹体系は、命題論理の規則九つに、さらに四つ、すなわち$\forall$の導入と除去、$\exists$の導入と除去を付け加えればよい。順に見て行こう。

### ∀-除去

この規則は、

$$\frac{\forall x F x}{F t}$$

と表わされる。ただし、$t$ は任意のターム、つまり個体定項か個体変項ないし関数表現であるとする。具体例で、この規則がどのように用いられるかを見てみよう。

**例題 1** $\forall x(Fx \to Gx), \forall x(Gx \to Hx) \vdash Fa \to Ha$ を証明せよ。

この証明は次のようになる。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $\forall x(Fx \to Gx)$ | Ass. |
| 2 | (2) | $\forall x(Gx \to Hx)$ | Ass. |
| 3 | (3) | $Fa$ | H |
| 1 | (4) | $Fa \to Ga$ | 1,∀-E |
| 1,3 | (5) | $Ga$ | 3,4,→-E |
| 2 | (6) | $Ga \to Ha$ | 2,∀-E |
| 1,2,3 | (7) | $Ha$ | 5,6,→-E |
| 1,2 | (8) | $Fa \to Ha$ | 3–7,→-I |

この規則が妥当な規則であることは直観的に明らかであろう。

しかし、これだけではこの規則の条件として十分ではない。例として $\forall x \exists y Rxy$ を考えてみよう。この式に ∀-除去の規則を適用し、$t$ として $y$ を用いれば、$\exists y Ryy$ が帰結する。だが、最初の式から後者が導出できないのは明らかである。（例えば、$R$ を「. . . は. . . を愛する」としてみれば、「誰もが誰かを愛する」から「自分自身を愛するものがいる」を導けないのは明らかである。）

そこで、このような導出を避けるために、「$x$ に対して自由 free for '$x$'」という言い回しを導入しよう。「変項 $t$ が式 $At$ において、$x$ に対して自由である」とは、「$t$ が、$At$ において $\forall x$ や $\exists x$ のスコープの内部に現れない」ということである。上の例では $t$ として選んだ $y$ が、$\exists y$ のスコープの内部に現れてしまったのである。したがって、この場合の $t$ は $y$ に対して自由ではなかったことになる。それゆえ、上の規則においてはさらに

> $t$ は、$Fx$ における変項に対して自由でなくてはならない

という条件が必要になる。この変項条件（変数条件）は単なる但し書きではなく、規則の本質的な一部と考えるべきである。

### ∀-導入

この規則は次のような形をもつ。

$$\frac{Ft}{\forall x F x}$$

ただし、$t$ は変項であり、$Ft$ が依存する前提に自由変項として現れてはならず、また $\forall x F x$ にも自由変項として現れてはならないとする。

さて、この規則はその形だけを見る限り、誤った推論を許容しているようにも見える。なにせ、ある $t$ が $F$ であることから、すべてのものが $F$ である、を導いているように見えるからである。しかし、この規則の真意はそういうことではない。上の $t$ は任意のものなのである。ちょうど、任意の三角形について、内角の和が二直角であることを証明することによって、すべての三角形の内角の和が二直角であることを証明できたように、任意の $t$ について、それが $F$ であることが証明できたのだから、すべてのものが $F$ であると結論してよい、というわけである。そしてその $t$ が任意のものであることを、変項条件が保証しているのである。具体例を見てみよう。

**例題 2** $\forall x(Fx \to Gx), \forall x(Gx \to Hx) \vdash \forall x(Fx \to Hx)$ を証明せよ。

これは先の例題の証明とほとんど同じになる。最後に $\forall$-I を使う点だけが異なっている。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $\forall x(Fx \to Gx)$ | Ass. |
| 2 | (2) | $\forall x(Gx \to Hx)$ | Ass. |
| 3 | (3) | $Fa$ | H |
| 1 | (4) | $Fa \to Ga$ | 1,$\forall$-E |
| 1,3 | (5) | $Ga$ | 3,4,$\to$-E |
| 2 | (6) | $Ga \to Ha$ | 2,$\forall$-E |
| 1,2,3 | (7) | $Ha$ | 5,6,$\to$-E |
| 1,2 | (8) | $Fa \to Ha$ | 3–7,$\to$-I |
| 1,2 | (9) | $\forall x(Fx \to Hx)$ | 8,$\forall$-I |

全称量化文を証明するには、その式から全称量化を取り去った式をまず証明し、その上で $\forall$-I を適用すればよい。最後に、変項条件が満たされているかどうかを確認しておく必要がある。$\forall$-I を適用した最後の式 (9) は、(1) と (2) の式に依存している。それらの式中に $a$ は登場していない。したがって、この $a$ は任意のものであることが確認できる。

**問題 4** $\forall x(Fx \to \neg Gx) \vdash \forall x(Gx \to \neg Fx)$ を証明せよ。

## 1.7 $\exists$-導入

$$\frac{Ft}{\exists x Fx}$$

ただし、$t$ は任意のタームとし、$t$ は $Fx$ において $x$ に関して自由とする。

この条件は、例えば $\exists y Ryy$ の一方の $y$ にだけ注目して $\exists x \exists y Rxy$ を導くような導出はマズイということを言っている。ただし、$Raa$ から $\exists x Rax$ を導くような導出が禁じられているわけではない。

**問題 5** $\forall x(Fx \to Gx), Fa \vdash \exists x Gx$ を証明せよ。

## 1.8 $\exists$-除去

この規則は

$$\frac{X \vdash \exists x Fx \qquad Y, Ft \vdash B}{X, Y - Ft \vdash B}$$

のように定式化できる。ここで、$Y - Ft$ は、前提 $Y$ から $Ft$ を除いたものを表わしている。この規則が満たすべき条件は以下の通り。

1. $t$ は個体変項とする。
2. $\exists x Fx, B, Y - Ft$ に $t$ が自由変項として現れてはならない。
3. $t$ は、$Fx$ において $x$ に対して自由でなくてはならない。

**例題 3** $\exists x Fx \vdash \neg \forall x \neg Fx$ を証明しなさい。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $\exists xFx$ | Ass. |
| 2 | (2) | $Fa$ | H. |
| 3 | (3) | $\forall x\neg Fx$ | H. |
| 3 | (4) | $\neg Fa$ | 3,∀-E |
| 2,3 | (5) | $\bot$ | 2,3,¬-E |
| 2 | (6) | $\neg\forall x\neg Fx$ | 3–5,¬-I |
| 1 | (7) | $\neg\forall x\neg Fx$ | 1,2–6,∃-E |

**問題 6** $\exists xFx \vdash \exists x(Fx \vee Gx)$ を証明しなさい。

**問題 7** 以下を証明しなさい。

1. $\forall x((Fx \vee Gx) \to Hx), \exists x\neg Hx \vdash \exists x\neg Fx$
2. $\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx \wedge Hx) \vdash \exists x(Gx \wedge Hx)$
3. $\forall x(Gx \to \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx) \vdash \exists x(Fx \wedge \neg Hx)$

## 一階述語論理の意味論

命題論理の意味論では、推論の妥当性を決定するのに、真理表および付値関数を用いる。一階の述語論理では、それはどのように行われるのか。一階の言語では、真理表の方法をそのまま用いることはできない。そこには量化が含まれているからである。また、命題論理では評価の対象は、命題の真偽だけであったが、一階の論理では、その命題自体がさらに細かい構造をもっている。したがって、基本的には付値関数に類似したやり方で命題の真偽評価が行われ、推論の妥当性が判定されるのであるが、細部ではかなり複雑になっている。ここではより直観的な記述から始めて、だんだんと精密な定義へと進むことにしたい。

一階の言語を解釈する枠組みは、構造、モデル、解釈などと呼ばれる。解釈という語は別の目的のためにとっておくことにして、以下では、構造あるいはモデルと言うことにする。一階の言語のための構造は、

1. 変項が（さらには量化子が）どのようなものの上を走るか、その全体を与え、
2. 他の非論理記号（述語記号や関数記号や個体定項）が何をあらわしているか、を特定する

ものである。したがって、ある構造 $A$ を定めるためには、まず第一に変項や量化子の走る領域（ドメイン）$D$ を定めなくてはならない。これは、一つの集合を定めるということに他ならない。その上で、次にこの定められた集合をベースに、その言語の個体定項がその集合のどの対象（メンバー）を指示するか、述語記号がその集合のどういう部分集合をなしているか、等々を規定しなくてはならない[4]。

### 構造についての直観的な考え方

以上のことをもう少し丁寧に述べよう。ある構造を決めるということは以下を決めることである。

1. ドメインの確定。ただし、ドメインは空集合ではないとする。ドメインは、当該の言語の任意の式に現れる変項の値域である。

[4]個体定項は自然言語における名前のようなものだから、それが $D$ 中のある対象を指示する、というのは十分に理解できるが、述語記号が $D$ の部分集合を表す、指示するというのはどういうことか。例えば、「ポチは白い」の述語「は白い」は、性質ないし属性を表していると考えるのが普通であって、それがある集合の部分集合であるというのは奇妙だ、と考える人もいるかもしれない。ここでは、$D$ の中の対象のうち、「$x$ は白い」という述語を満足するもののみを考えている。その全体が $D$ の部分集合をなすことは明らかであろう。このような部分集合を述語の外延という。論理学の中には、述語を外延としてではなく、あくまで属性として扱おうという立場もある（内包論理）が、通常の古典的な論理では外延を扱うのが一般的である。というのも、論理学において特に必要な情報は、どの対象にその述語を適用すれば真になるかということであって、それはその対象がその述語の外延（つまり部分集合）のメンバーか否か、として判定できるからである。

2. 当該言語の任意の名前（個体定項）に対し、それが指示するもの、すなわち１で決められたドメイン内の対象の確定。

3. （当該言語の）関数記号に対して、ドメイン内の対象ないし対象列に対し、ドメイン内の対象を割り当てる関数を決める。

4. 当該の言語の任意の文記号に真 (0) ないし偽 (1) の真理値を割り当てる。

5. 述語記号にドメインの部分集合を割り当てる。

最後の５についてもう少し詳しく説明を与える。例えば、$R$ が 1-項述語記号の場合は、$R$ に $D$ の部分集合を割り当てればよい。その場合 $R(a)$ という式が真になるのは、上の２によって $a$ に割り当てられた（$D$ の中の）対象が $R$ に割り当てられた部分集合のメンバーになっているような場合である。$R$ が 2-項述語記号の場合は、その外延として $D \times D$ の部分集合を考える。（$D \times D$ は、$D$ からとってきた対象とふたたび $D$ からとってきた対象によってつくられる順序対の全体を表す。）この場合 $R(a_1, a_2)$ が真となるのは、$a_1$ が表す対象 $o_1$ と $a_2$ が表す対象 $o_2$ とでつくられる順序対 $< o_1, o_2 >$ が $R$ の表す部分集合のメンバーである場合である。

ここで、こうした構造の設定が集合論に依拠していることに注意しよう。構造を規定するのに用いられる概念はすべてきちんと集合論的に記述できるのである。（例えば、順序対）これまでに見てきたことを全体的に考えてみると、ひとつの構造を用意するということで行われているのは、一方に一階の言語を構成する記号群があり、他方に集合的な構造があって、前者の記号群のそれぞれに後者の集合やそのメンバーを割り当てるという作業である。この「割り当て」の作業を関数 $I$（解釈関数）を用いて記述することができる。例えば、記号 $a$ は個体定項記号だから、これは $D$ の中の一つの対象を指示する。したがって、$I(a) \in D$ のように書くことができる。また、1-項述語記号 $R$ は $D$ の部分集合だから、$I(R) \subseteq D$ のように、もし $R$ が 2-項述語ならば、$I(R) \subseteq D \times D$ と書くことができる。

ここでいくつか具体的な解釈の事例を考えてみよう。

**Example 5** $L(a, f(f(a)))$ を解釈する一つの構造

(1) $D = \{\mathrm{Alma}, \mathrm{Max}, \mathrm{Dan}\}$
(2) $L$ の解釈 $I(L)$ は次の表によって与えられるとする。

| $\phi$ | Alma | Max | Dan |
|---|---|---|---|
| Alma | 1 | 1 | 1 |
| Max | 1 | 0 | 1 |
| Dan | 0 | 0 | 0 |

これは、例えば、最初に縦の欄の Alma と横の欄の Alma との間には関係 $L$ は成り立たない (=1) が、縦の欄の Dan と横の欄の Alma の間には $L$ が成り立つ、ということを示している。これを先の記号を使って書き表せば、$< \mathrm{Alma}, \mathrm{Alma} > \notin I(L)$ だが、$< \mathrm{Dan}, \mathrm{Alma} > \in I(L)$ ということを表している。だから、関係 $L$ を特徴づけるのに上のような表を使わずに、$I(L) = \{< \mathrm{Max}, \mathrm{Max} >, < \mathrm{Dan}, \mathrm{Alma} >, < \mathrm{Dan}, \mathrm{Max} >, < \mathrm{Dan}, \mathrm{Dan} >\}$ のように順序対の集合として書くことができる。

(3) $a$ が指示するものは Alma であるとする。すなわち、$I(a) = \mathrm{Alma}$

(4) 関数記号 $f$ は、次のような関数 $F$ を表わすとする。すなわち、$F(\mathrm{Alma}) = \mathrm{Max}, F(\mathrm{Max}) = \mathrm{Dan}, F(\mathrm{Dan}) = \mathrm{Dan}$

**問題 8** この構造のもとで $L(a, f(f(a)))$ が真であることを示しなさい。

**Example 6** $s(s(0)) + s(s(s(0))) = s(s(s(s(s(0)))))$ の解釈

いま構造を次のようなものとする。
（1）ドメイン：$N = \{0, 1, 2, \ldots\}$
（2）関数記号 $s$ に割り当てられる関数：後続者関数
（3）関数記号 $+$ に割り当てられる関数：通常の乗法
（4）個体定項 0 が指示するもの：通常のゼロ

この場合、$s(s(0))+s(s(s(0))) = s(s(s(s(s(0)))))$ は偽と解釈される。なぜなら、この構造のもとでは、$2\times 3 = 5$ と解釈されることになるからである。それは、構造の（3）が通常の解釈とは異なり、$+$ が乗法と解されているからである。これに対し、もし（3）を通常どおり加法とするならば、この例が真と解釈されることは明らかである。いま例としてとった構造とは異なり、すべての関数記号や定項を通常の算術演算を表わすものとする構造（もちろんドメインは $N$ とする）を、それ以外の構造から区別して、算術の言語の標準構造ないし標準解釈 standard interpretation などと呼ぶ。この構造を以下では $\mathcal{N}$ で表わすことにする。この構造は後で重要になる。

### 1.8.1 構造についての形式的な議論

次の課題は、「ある構造 $\mathbf{A}$ において式 $S$ が真である」という概念を厳密に定式化することである。その際に出発点となるのは、一つの構造がいわば解釈関数なるもの $I$ を一つ決定する、という考え方である。とりあえず、関数記号の解釈を後回しにすることにすれば、$I$ は次のような働きをもつ。（以下、われわれの言語を L で表すことにする。また、さしあたり変項の解釈は無視して、もっとも単純なケースで議論の形を眺めることにしよう。変項の解釈は後で与える。）

もし $c$ が言語 L の個体定項ならば、$I(c) \in D$ である。

もし $R$ が言語 L の n-項述語ならば、$I(R) \subseteq D^n$ である。

これは、上で直観的に述べたことの単純な言い換えにすぎない。その上で、これにもとづいて（変項を含まない）原子式の解釈を与えることができる。

もし $R(a_1, \ldots, a_n)$ が L の原子式であるならば、$V_{\mathbf{A}}(R(a_1, \ldots, a_n)) = 1$ となるのは、$< I(a_1), \ldots, I(a_n) > \in I(R)$ のときであってそのときにかぎる。

説明。$R(a_1, \ldots, a_n)$ に現れる $R$ や $a_1$ はいずれも言語 L の記号である。ある構造を決定したならば、それによって一つの $I$ が定まると考えられる。まず、ドメイン $D$ が確定し、そして $I(a_1)$ は $D$ の中の一つの対象を確定する。そしてそれらの対象の順序 n-組が $I(R)$ によって決まる $D^n$ の部分集合のメンバーであるならば、そのときにかぎってもとの原子式はこの構造において真なのである。

さて、以上の準備に基づいて、ある構造 $\mathbf{A}$ における付値 $V_{\mathbf{A}}$ を次のように定義できる。

**定義 3** $V_{\mathbf{A}}$ の定義

1. $V_{\mathbf{A}}(\neg\varphi) = 1$ iff $V_{\mathbf{A}}(\varphi) = 0$
2. $V_{\mathbf{A}}(\varphi \wedge \psi) = 1$ iff $V_{\mathbf{A}}(\varphi) = 1$ and $V_{\mathbf{A}}(\psi) = 1$
3. $V_{\mathbf{A}}(\varphi \vee \psi) = 1$ iff $V_{\mathbf{A}}(\varphi) = 1$ or $V_{\mathbf{A}}(\psi) = 1$
4. $V_{\mathbf{A}}(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ iff $V_{\mathbf{A}}(\varphi) = 0$ or $V_{\mathbf{A}}(\psi) = 1$
5. $V_{\mathbf{A}}(\forall x\varphi) = 1$ iff $V_{\mathbf{A}}(\varphi[c/x]) = 1$ for all constant $c$ in L

6. $V_{\mathbf{A}}(\exists x\varphi) = 1$ iff $V_{\mathbf{A}}(\varphi[c/x]) = 1$ for some constant $c$ in L

ただし、ここで $\varphi[c/x]$ は、$\varphi$ の自由変項 $x$ のすべてに $c$ を代入してできる式とする。この「ある構造 $\mathbf{A}$ における付値 $V_{\mathbf{A}}$」という概念を使って、ある命題 $\varphi$ が妥当であること（つまり $\models \varphi$、言い換えれば、どんなモデルでも $\varphi$ が真であること）を示すことができる。

**Example 7** $\models \forall x(Lxx \to \exists yLxy)$

これを示すには、背理法を用いる。つまり、$\not\models \forall x(Lxx \to \exists yLxy)$ と仮定し、そこから矛盾を導けばよい。

1. $\not\models \forall x(Lxx \to \exists yLxy)$ なのであるから、少なくとも一つのモデル $\mathbf{A}$ において $\forall x(Lxx \to \exists yLxy)$ は偽 $(= 0)$ である。したがって、上の（５）により、少なくとも一つのある $c$ について $Lcc \to \exists yLcy$ は $0$ でなければならない。すなわち、$V_{\mathbf{A}}(Lcc \to \exists yLcy)) = 0$
2. それゆえ、（４）により $V_{\mathbf{A}}(Lcc) = 1$ かつ $V_{\mathbf{A}}(\exists yLcy)) = 0$ でなければならない。
3. $V_{\mathbf{A}}(\exists yLcy)) = 0$ でなければならないのであるから、いかなる対象 $a$ についても $V_{\mathbf{A}}(Lca)) = 0$ でなければならない。ところが、対象 $c$ については $V_{\mathbf{A}}(Lcc) = 1$ が成立する。これは矛盾である。
4. したがって、最初の仮定「少なくとも一つのモデル $\mathbf{A}$ において $\forall x(Lxx \to \exists yLxy)$ は偽 $(= 0)$ である」が否定されたのだから、いかなるモデル $\mathbf{A}$ においても $\forall x(Lxx \to \exists yLxy)$ は真でなくてはならない。（証明終）

**問題 9** 上の方法を用いて、$\models \forall xFx \to \exists xFx$ を示せ。

#### 1.8.2 割当による量化子の解釈

しかしながら、上述のような付値関数の定義、特に（５）と（６）の定義は、量化子の解釈としては欠陥がある。例えば、「あるものは白い」という文を考えてみよう。この文は、上の定義によれば、

> $L$ のある定項 $c$ があって、「$c$ は白い」が真であるならば真という真理値が与えられる。

しかし、その言語 $L$ に「$x$ は白い」を満たすような定項 $c$ がなかったとしよう。その場合、「あるものは白い」という文は偽であろうか。ある言語にある述語を満たすものの名前があるか否かは、言語的な事実である。それに対し、ある言明が真であるか否かは、言語にかかわる事柄というよりは、世界の在り方についての事実によるべきであろう。したがって、上述のような解釈では、世界について語っている文の真偽が、世界についての事実によって決まるのではなく、われわれのもっている言語の偶然的な性質によって決まることになってしまう。

もっと一般的に言えば、例えば集合論の言語では、名前（あるいは定項）の数はどんなに多くても高々可算個でしかない。それに対し、集合論で構成されるもの（例えば実数）は枚挙できないのである。それゆえ、上述のような解釈では、集合論的な真理を捉えるには十分ではないことがわかる。

第二の欠陥として、上述の解釈は文（閉式）に対する解釈であった。ところがわれわれは、文についての帰納的定義をもっているわけではない。われわれにあるのは、式の帰納的定義なのである。そのことは、例えば、$\forall x(Fx \to Gx)$ のような量化文を考えてみればよい。これは、$Fx \to Gx$ から構成されるのである。したがって、構造や解釈が文にしか適用されないならば、意味論的な性質について帰納法を用いることはできないであろう。この困難を回避するには、自由変数を含む式（開式）についても解釈を与えるような方法を考案しなくてはならない。

そこで、改めて解釈の在り方を考えよう。基本的なアイデアは、変項 $x$ に対して、定項を介さずに直接 $D$ の中の対象を割り当てる、というものである。先に見た解釈 $I$ は、個体定項に $D$ の中の対象を割り当てる関数であった。それは必然的に $D$ の中への into 関数とならざるを得ない。それは $D$ の上への onto 関数ではなかった。そして、それに基づいて与えた原子式の解釈も、原子式一般の解釈ではなく、変項を含まない原子式に限られていたのである。それに対し、以下で導入する関数 $g$ は $D$ の上への関数と考えるのである。ここで、$g$ を一つ決めるとい

うことは、$g(x_1), g(x_2), \ldots \in D$ となるような $D$ の中の対象からなる一つの対象列を決めることだ、という点に注意しよう。$g$ は変項の無限列に対してそのおのおのの変項に $D$ の対象を割り当てるような割当関数である。もしこのような $g$ が考えにくいならば、単純に $D$ の中の対象の無限列を考えてもよい[5]。しかし、「$D$ の中の対象の無限列」といっても、それらは無数にある。上で述べた $g$ はそれらの無数にある対象列の一つをピックアップする関数だと考えればよい。以下では、話を簡単にするために、$x_1, x_2, \ldots$ のように添数付きの変項を用いる。また、各変項がある対象列によって解釈されるとき、それは、各変項に付いている添数に対応する対象列上の対象によって解釈される、とする。すなわち、ある式に変項 $x_5$ があれば、その変項は対象列の 5 番目の対象によって解釈されるのである。

そこで、対象の無限列による式の「充足 satisfaction」ということを具体例を使って考えてみよう。

**Example 8** $R(x_1, x_2)$

これは、$D$ として自然数の集合を考え、$R(x, y)$ が $x \leq y$ を表現しているとき、対象列 $g = (d_1, d_1, \ldots) \in D$ の最初の二つの項 $d_1, d_2$ の間に $d_1 \leq d_2$ という関係が成立しているようなすべての対象列によって充足される。

以下、このような「対象列による充足」という概念を用いて解釈の方法を改めて述べよう。まずはタームの解釈である。$g = (d_1, d_1, \ldots) \in D$ とする。

**定義 4** $t$ をタームとする。このとき、
もし $t$ が個体定項ならば、$[t]_{\mathbf{A},g} = I(t)$、
もし $t$ が変項 $x_i$ ならば、$[t]_{\mathbf{A},g} = d_i$ である。

この定義に基づいて、今度は正式な原子式の解釈を述べることができる。

**定義 5** もし $R(t_1, \ldots, t_n)$ が $L$ の原子式であるならば、$A$ のもとで対象列 $g$ が $(R(t_1, \ldots, t_n))$ を充足するのは、$< [t]_{\mathbf{A},g}(t_1), \ldots, [t]_{\mathbf{A},g}(t_n) > \in I(R)$ のときであってそのときにかぎる。

ここで具体例で考えてみよう。例えば、与えられた原子式が $R(x_1, \ldots, x_n)$ のような自由変数のみを含む式であったとする。この場合、モデル $A$ の下で、与えられた対象列 $g$ がこの式を充足する（これを記号で $g \models_A R(x_1, \ldots, x_n)$ と書くことにする、ただし場合によっては下付の $A$ は省略する）のは、次のような場合である。

$$g \models_A R(x_1, \ldots, x_n) \text{ iff } < g(x_1), \ldots, g(x_n) > \in I(R).$$

すなわち、$g$ によって決まる対象列の 1 番目から n 番目までの対象がつくる順序 n-組が $I(R)$ によって決まる集合のメンバーであるとき、$g$ はこの式を充足するのである。もう少しやっかいなのは、原子式が変項だけでなく、個体定項をも含むような場合である。例えば、$R(x_1, c_1, c_2)$ のような式を考えてみよう。これがモデル $A$ の下で、与えられた対象列 $g$ によって充足されるのは、こんどは $< g(x_1), g(x_2), g(x_3) > \in I(R)$ の場合ではなく、$< g(x_1), I(c_1), I(c_2) > \in I(R)$ の場合である。定項の場合は、$g$ によってではなく、解釈 $I$ によってその対象が決まるのである。上の原子式の定義は、これら両方のケースを含んでいることに注意して欲しい。

次の量化子の場合を考えてみよう。$\forall x_n R$ を考える。ここで $R$ だけをとって考えれば、$R$ は自由変数として $x_n$ を含んでいるはずである。このとき、$g$ によって決まる対象列が $R$ を充足するということを次のように定義する。（以下、$g$ によってきまる対象列をたんに対象列 $g$ と言うことにする。）

> 対象列 $g$ が $\forall x_n R$ を充足する（$g \models_A \forall x_n R$) iff n-番目の項を除いて $g$ と同じすべての対象列によって $R$ が充足される。

[5] どうして無限列を考えるのか。もし $x_1 = x_2 + x_3$ という式を解釈するならば、三つの対象からなる順序三組を考えればよいのではないか。しかし、任意の式を解釈するときには、あらかじめその式にいくつの変数が含まれているかを確定することはできない。また、本文中で述べるように、$x_{36} = x_{58} + x_{101}$ のような式を解釈するときは、与えられた対象列の 36 番目の対象と 58 番目の対象、101 番目の対象の間に上のような関係が成り立つかどうかを考えなくてはならない。こうした事態にいつでも対応できるように対象の無限列を考えるのである。

ここで定義されている内容が、$R$ が一変数の式の場合、$g$ が $R$ を充足するのは、$D$ のすべての対象が $R$ を充足する場合にほかならない、ということと実質的に同じであることに注意されたい。$R$ が $x_n$ という自由変数だけを含んでいるのだから、$g$ が与えられたときに問題になるのは、$g(x_n)$ だけである。そして、この項だけを入れ替えたすべての対象列によって充足されるということは、$D$ のすべての対象によって $R$ が充足される、ということにほかならない。

存在量化子の場合は次のようになる。

> 対象列 $g$ が $\exists x_n R$ を充足する（$g \models_A \exists x_n R$) iff n-番目の項を除いて $g$ と同じある対象列によって $R$ が充足される。

この定義のポイントは次のような例を考えてみればわかるであろう。

$$g \models_A \exists x_2 L x_1 x_2$$

すなわち、$g$ が $\exists x_2 L x_1 x_2$ を充足する、とはどういうことなのか。いま $g$ という対象列が与えられたとしよう。したがって、この式の $x_1$ は、$g(x_1) = d_1$ を指示しているかのように扱われてよい。だが、このとき

$$g \models_A \exists x_2 L x_1 x_2 \text{ iff } g \models_A L x_1 x_2$$

のように考えてはいけない。なぜなら、$g \models_A L x_1 x_2$ は、この場合 $< g(x_1), g(x_2) >\in I(L)$ と解釈されるからである。ここがポイントなのだが、元の式 $\exists x_2 L x_1 x_2$ の $\exists x_2$ は、$g$ とは独立である。$< g(x_1), * >\in I(L)$ となるような $*$ は、$g(x_2)$ によって指定される対象と同じである必要はない。別な $g'$ によって決まる $g'(x_2)$ という対象であってもよい。そうだとすれば、元の式を解釈するのに、われわれは $g$ と $g'$ という二つの対象列を考えなければならないことになろう。しかし、この後の $g'$ は、それが $x_2$ に割り当てる対象だけが重要なのであって、それ以外の変項にそれが割り当てる対象は $g$ と同じであってもよいことに注意しよう。そこで、次のような表記を採用しよう。

$$g \sim_n g'$$

これは、対象列 $g$ と $g'$ とが $x_n$ に割り当てる対象の点で異なっているが、その他の点ではまったく同じ対象列だ、ということを表現している。したがってこの表記法を使えば、

> 対象列 $g$ が $\exists x_n R$ を充足する（$g \models_A \exists x_n R$) iff $g \sim_n g'$ であるようなある対象列 $g'$ によって $R$ が充足される。

のように存在量化の充足を定義できるであろう。以上でようやく準備が整った。充足という概念の定義を改めて述べよう。

**定義 6** 充足の定義

1. $g \models_A \neg\varphi$ iff $g \not\models_A \varphi$
2. $g \models_A \varphi \wedge \psi$ iff $g \models_A \varphi$ and $g \models_A \psi$
3. $g \models_A \varphi \vee \psi$ iff $g \models_A \varphi$ or $g \models_A \psi$
4. $g \models_A \varphi \rightarrow \psi$ iff $g \not\models_A \varphi$ or $g \models \psi$
5. $g \models_A \forall x_n \varphi$ iff $g \sim_n g'$ であるようなすべての $g'$ について $g' \models_A \varphi$
6. $g \models_A \exists x_n \varphi$ iff $g \sim_n g'$ であるようなあるの $g'$ について $g' \models_A \varphi$

以上の充足の定義を使って、式の真理を定義することができる。

式 $\varphi$ が（解釈 $A$ の下で）真である iff すべての対象列が $\varphi$ を充足する。

さらに推論の妥当性についても定義を与えておこう。（$X$ は式の集合とする。）

$X \models \varphi$($\varphi$ は $X$ の論理的帰結である、前提 $X$ から結論 $\varphi$ への推論が妥当である) iff $X$ のメンバーがすべて真となるようなあらゆる解釈の下で $\varphi$ が真である。

$\models \varphi$($\varphi$ が妥当である) iff $\varphi$ がすべての解釈の下で真である。

この定義においてもっとも分かりにくいのは、「対象列 $g$ によって変項にも値を割当てる」という部分であろう。まず第一に注意すべきなのは、問題の式が $Fa \to Gb$ のような変項を含まない式（＝文）の場合、ここでは $g$ が実質的には何の役割も果たさない、ということである。では、こうは考えられないだろうか。われわれにとって問題なのは変項を含むような任意の式ではなく、文なのだから、そして文の場合には自由変項は含まれないのだから、$g$ のような対象列を考える必要はないのではないか。しかしながら、$\forall x_1 \exists x_2 Rx_1x_2$ のような文の場合、その文の真偽の値は $\exists x_2 Rx_1x_2$ という式の真偽に依存し、この式の値は $Rx_1x_2$ の真偽に依存すると考えられる（合成原理）。したがって、文の真偽はその部分式の真偽に依存するように解釈されるとすれば、自由変項を含む式の評価を考えなくてはならない。

そこで、上で見た解釈は二重構造をもっていたと見ることができる。まず、非論理記号である個体定項、述語記号等の解釈を決める解釈関数 $I$ があり、それとは別に変項の解釈を行うための対象列 $g$ による充足の定義があった。ただし、$g$ が変項に割り当てる対象は $D$ の中の対象でなくてはならないのだから、その意味で $I$ と $g$ がまったく無関係だというわけではない。このことを例で考えてみよう。

**Example 9** $\forall x_1 \exists x_2 Rx_1x_2$ の解釈

この言語には二項述語記号 $R$ のみが含まれ、解釈のドメインは $\{p_1, p_2, p_3\}$ であるとする。また、$I(R) = \{<p_1, p_2>, <p_1, p_1>, <p_2, p_3>, <p_3, p_1>\}$ とする。

このとき $g$ は、$D$ の対象からなる任意の無限列である。しかし、それらの対象列を、$x_1$ に相当する項、つまり対象列の一番目の対象が何であるかによって分類すれば、すべての対象列が三種類に分類できる。つまり、一番目の対象が $p_1$ であるようなもの、$p_2$ であるようなもの、$p_3$ であるようなものの三種類である。そこで、いま一番目の対象が $p_1$ であるような任意の $g$ をとろう。このとき、

$g(x_1) = p_1$ ならば、$g \sim_A g'$ であり、かつ $g' \models_A Rx_1x_2$ となるような $g'$ が存在する。

なぜなら、$<p_1, p_2> \in I(R)$ だからである。もしこの $g$ の二番目の対象がたまたま $p_2$ であったならば、$g'$ として $g$ そのものをとればよい。そしてこのことは、一番目の対象が $p_2$ や $p_3$ であるような対象列 $g$ についても成り立つ。

$g(x_1) = p_2$ ならば、$g \sim_A g'$ であり、かつ $g' \models_A Rx_1x_2$ となるような $g'$ が存在する（なぜなら $<p_2, p_3> \in I(R)$）。

$g(x_1) = p_3$ ならば、$g \sim_A g'$ であり、かつ $g' \models_A Rx_1x_2$ となるような $g'$ が存在する（なぜなら $<p_3, p_1> \in I(R)$）

したがって、どんな $g$ をとっても $g' \models_A Rx_1x_2$ となるような $g'$ が存在することがわかった。このことは $g \models_A \exists Rx_1x_2$ が成り立つということを意味する。

ところで、このことはどのような $g$ についても成り立つのであるから、$g(x_1)$ を置き換えるあらゆる $g'$ について、$g' \models_A \exists Rx_1x_2$ が成り立つ。このことから定義により $g \models_A \forall x_1 \exists x_2 Rx_1x_2$ が成立する。

**問題 10** 上と同じ構造のもとで $\exists x_1 \forall x_2 Rx_1x_2$ が偽であることを示せ。

**Example 10** $\forall x_1 \exists x_2 (Lx_1x_2 \land \neg Ex_2)$

一項述語記号 $E$ と二項述語記号 $L$ の解釈は次によって与えられるとする。

構造 A の議論領域は自然数の集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$I(E) = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$

$L = \{< m, n > | m < n\}$

いま、$g$ を任意に選んだとする。このとき、$g(x_1)$ が指定する対象が、偶数のケースと奇数のケースの二通りに分けられることに注意しよう。

(1)　$g(x_1)$ が偶数の場合：この場合明らかに $g(x_1)+1$ は奇数である。それゆえ、$g(x_1)+1 \notin I(E)$ である。したがって、$g \sim_2 g'$ であり、しかも $g'(x_2) = g(x_1)+1$ となっているような $g'$ がとれる。この $g'$ の下で、$g' \not\models Ex_2$ となるから、$g' \models \neg Ex_2$。一方、$< g(x_1), g(x_1)+1 > \in I(L)$ だから、$g' \models Lx_1x_2$。したがって、$g' \models Lx_1x_2 \wedge Ex_2$ である。$g \sim_2 g'$ であるようなある $g'$ について $g' \models Lx_1x_2 \wedge Ex_2$ が言えたのだから、$g \models \exists x_2(Lx_1x_2 \wedge Ex_2)$ が言えた。

(2)　$g(x_1)$ が奇数の場合：この場合明らかに $g(x_1)+2$ も奇数である。それゆえ、$g(x_1)+2 \notin I(E)$ である。したがって、$g \sim_2 g'$ であり、しかも $g'(x_2) = g(x_1)+2$ となっているような $g'$ がとれる。この $g'$ の下で、$g' \not\models Ex_2$ となるから、$g' \models \neg Ex_2$。一方、$< g(x_1), g(x_1)+2 > \in I(L)$ だから、$g' \models Lx_1x_2$。したがって、$g' \models Lx_1x_2 \wedge Ex_2$ である。$g \sim_2 g'$ であるようなある $g'$ について $g' \models Lx_1x_2 \wedge Ex_2$ が言えたのだから、$g \models \exists x_2(Lx_1x_2 \wedge Ex_2)$ が言えた。

以上の (1) と (2) とから、$g \sim_1 g''$ であるような任意の $g''$ について $g'' \models \exists x_2(Lx_1x_2 \wedge Ex_2)$ が言えるのだから、定義により、任意の $g$ について $g \models \forall x_1 \exists x_2(Lx_1x_2 \wedge \neg Ex_2)$ であり、したがってこの式は真である。

最後に関数記号の取扱と等号の解釈を説明しよう。関数記号 $f$ にはそれに対応する $D$ の上の演算 $I(f)$ が割り当てられる。したがって、ターム $f(t_1, \ldots, t_n)$ の解釈は次のようになる。

$$[f(t_1, \ldots, t_n)]_{\mathbf{A},g} = (I(f))(< [t_1]_{\mathbf{A},g}, \ldots, [t_n]_{\mathbf{A},g} >)$$

等号については、原子式が $t_1 = t_2$ という形のケースを考えておけばよい。

$$g \models_A t_1 = t_2 \text{ iff } [t_1]_{\mathbf{A},g} = [t_2]_{\mathbf{A},g}$$

さて、ここまで Tarski に基づく意味論をかなり詳細に見てきた。上に述べたことは Tarski の仕事のかなり忠実な再現であり、正確なことは正確なのだが、いかんせん使い勝手はよくない。だから、通常の使用に際しては、その前に述べた付値関数による方法を使用してもかまわない。本当は上述のように「無限対象列を使った充足」という方法があるということさえ知っていれば、実際には、やや簡略化した付値関数でことを済ませてかまわない、ということにしよう。

例えば、一般に

もし $\models \varphi$ かつ $\models \varphi \to \psi$ ならば、$\models \psi$

が成立する。これは次のように証明すればよい。いま、ある構造 $A$ を考えその下で結論が成立しないとする。すなわち、$\not\models_A \psi$ と仮定する。それゆえ、$V_A(\psi) = 0$ である。一方、前提の $\models \varphi$ から、$\models_A \varphi$、すなわち $V_A(\varphi) = 1$ である。これら二つから、付値関数の定義により $V_A(\varphi \to \psi) = 0$。ところが、もう一つの前提により $V_A(\varphi \to \psi) = 1$。これは矛盾である。したがって、$\models \varphi$ かつ $\models \varphi \to \psi$ であるとき、$\psi$ を偽とするような構造は存在しないから、$\models \psi$ である。

**問題 11** 以下を、付値関数を用いて証明しなさい。

(1)　$\forall x(Ax \vee Bx), \exists y \neg A \models \exists x Ax$

(2)　$\not\models \exists x \forall y(Ryx \leftrightarrow \neg Ryy)$

## 完全性

以下の課題は一階の論理の自然演繹体系が完全であること、つまり

$\Gamma \models \varphi$ ならば、$\Gamma \vdash \varphi$

を示すことである。しかしそのためには、若干の準備が必要である。まず最初に、健全性を示そう。

### 健全性

**定理 1 (健全性)** $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$

（ここで $\Rightarrow$ はメタ言語の「ならば」を表わすとする。）

さて、これを証明するには二つの場面にわけておくのが便利である。自然演繹での導出は、ある式（または複数の式）から規則を使って別の式を導くようなステップの連鎖と考えられる。その各連鎖において用いられる規則は、命題論理で用いられた規則であるか、量化子に関する規則かのいずれかである。

（1） 導出に際して用いられる規則が命題論理の規則の場合　この場合は、すでに命題論理の範囲では健全性が証明されているのだから基本的に問題はない。しかし、念のために自然演繹の各規則に即して、健全性が成立することを見ておこう。この証明は、導出の長さについての帰納法を使うから、最初に「導出」というものをちゃんと定義しておかなくてはならない。

**定義 7** 導出のあつまり $X$ は、以下を満足する最小の集合である。

(1) $\varphi \in PROP$ であれば、ただ一つの式からなる証明樹 $\varphi$ は $X$ に属する。

(2) もし $\dfrac{D}{\varphi}, \dfrac{D'}{\varphi'} \in X$ ならば、$\dfrac{\dfrac{D}{\varphi} \quad \dfrac{D'}{\varphi'}}{\varphi \wedge \varphi'} \in X$

(3) もし $\dfrac{D}{\varphi \wedge \psi} \in X$ ならば、$\dfrac{\dfrac{D}{\varphi \wedge \psi}}{\varphi}, \dfrac{\dfrac{D}{\varphi \wedge \psi}}{\psi} \in X$

(4) もし $\begin{array}{c}\varphi \\ \dfrac{D}{\psi}\end{array} \in X$ ならば、$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi} \\ \dfrac{D}{\psi}\end{array}}{\varphi \to \psi} \in X$

(5) もし $\dfrac{D}{\varphi}, \dfrac{D'}{\varphi \to \psi} \in X$ ならば、$\dfrac{\dfrac{D}{\varphi}, \quad \dfrac{D'}{\varphi \to \psi}}{\psi} \in X$

(6) もし $\dfrac{D}{\neg\neg\varphi} \in X$ ならば、$\dfrac{\dfrac{D}{\neg\neg\varphi}}{\varphi} \in X$

(7) $\neg$-I と $\neg$-E の規則については、$\to$ についての規則と同様。

**定義 8** 式の集まり $\Gamma$ と式 $\varphi$ の間の関係 $\Gamma \vdash \varphi$ は、次のことを意味する。すなわち、$\Gamma$ に含まれる前提と結論 $\varphi$ をもつ導出が存在する。

以上の準備のもとで、命題論理の規則を用いた導出については健全性が成立することを示そう。上の定義により、$\Gamma \vdash \varphi$ であるのは、$\Gamma$ に含まれる前提からの導出 $D$ が存在するということである。そこで、前提 $\Gamma$ と結論 $\varphi$ をもつおのおのの導出 $D$ について、$\Gamma \models \varphi$ が成立することを示せばよいだろう。

まず、$D$ が一要素からなる導出の場合を考える。この場合、明らかに $\varphi \in \Gamma$ である。したがって $\Gamma \models \varphi$ であることは明らか[6]。

[6] この場合、$\varphi \in \Gamma$ なのだから、$\Gamma$ に含まれる式すべてを真とするようなモデルは、当然 $\varphi$ を真にするようなモデルである。

後は、上の導出の定義に即して、各規則を一つづつチェックしてゆけばよい。いま、帰納法の仮定として、$\dfrac{D}{\varphi}, \dfrac{D'}{\varphi'}$ を導出とし、$D, D'$ で用いられる前提をすべて含んでいるような $\Gamma, \Gamma'$ について、$\Gamma \models \varphi, \Gamma' \models \varphi'$ が成立しているとする。その上で $\wedge$-I を検討しよう。

まず、$\Gamma''$ が $\dfrac{\dfrac{D}{\varphi}, \quad \dfrac{D'}{\varphi'}}{\varphi \wedge \varphi'}$ の前提を含んでいるとする。いま $\Gamma, \Gamma'$ が $D, D'$ で用いられるすべての前提を含み、しかもそれ以外の式は含まないとしよう。このとき、$\Gamma'' \supseteq \Gamma \cup \Gamma'$ となり、確かに $\Gamma'' \models \varphi, \Gamma'' \models \varphi'$ は成立する。そこで、すべての $\psi \in \Gamma''$ について $v(\psi) = 1$ となるような任意の $v$ を考えよう。明らかに、$v(\varphi) = v(\varphi') = 1$ である。したがって $v(\varphi \wedge \varphi') = 1$ となり、これで $\Gamma'' \models \varphi \wedge \varphi''$ が示された。

次に $\wedge$-E についてチェックしよう。いま、$\dfrac{D}{\varphi \wedge \psi}$ の前提をすべて含むような任意の $\Gamma$ について、$\Gamma \models \varphi \wedge \psi$ が成り立つと仮定する。このとき明らかに、$\Gamma$ は $\dfrac{\dfrac{D}{\varphi \wedge \psi}}{\varphi}$ のすべての前提を含んでいる。したがって、すべての $\sigma \in \Gamma''$ について $v(\sigma) = 1$ となるような任意の $v$ のもとで、$v(\varphi \wedge \psi) = 1$ が成り立ち（仮定による）、それゆえ $v(\varphi) = 1$ である。これで $\Gamma \models \varphi$ が示された。

$\to$-I の場合。$\dfrac{\varphi}{\begin{array}{c}D\\ \psi\end{array}}$ のすべての前提を含むような任意の $\Gamma$ について、$\Gamma \models \psi$ が成り立つと仮定する。いま、$\Gamma'$ が $\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ D\end{array}}{\psi}}{\varphi \to \psi}$ のすべての前提を含むとしよう（$\Gamma$ は $\Gamma' \cup \{\varphi\}$ に等しいことに注意）。

いま $\Gamma' \not\models \varphi \to \psi$ と仮定する。このとき、$\sigma \in \Gamma''$ について $v(\sigma) = 1$ となるような $v$ で、$v(\varphi \to \psi) = 0$ となるような $v$ が存在する。したがって、定義により $v(\varphi) = 1$ かつ $v(\psi) = 0$ である。ところがこのとき、$\Gamma' \cup \{\varphi\} \not\models \psi$ となり、$\Gamma' \cup \{\varphi\} = \Gamma$ であるから、$\Gamma \not\models \psi$。これは矛盾である。それゆえ、$\Gamma' \models \varphi \to \psi$。（これら以外の規則については省略。）

（2）導出の最終ステップで量化の規則が使われる場合の証明（以下では全称量化の規則のみを扱う。存在量化の規則は全称と否定から定義できるから。）

$\forall$-I、つまり

$$\dfrac{\dfrac{D}{\varphi(x)}}{\forall x \varphi(x)}$$

をチェックする。導出 $D$ で用いられる前提のすべてが $\Gamma$ に含まれ、かつ $x$ は $\Gamma$ において自由ではないとする。帰納法の仮定として $\Gamma \models \varphi(x)$、つまり

すべての $A, g$ に関して、$\models_{A,g} \Gamma$ ならば、$\models_{A,g} \varphi(x)$

が成り立つとする。ここで $x$ が $\varphi(x)$ に現れる自由変項の一番目のものと仮定しても問題はない。したがって、すべての $A, g$ に関して、$\models_{A,g[x_1/d]} \Gamma$ ならば、$\models_{A,g[x_1,d]} \varphi(x)$ ということがすべての $d \in D$ について成り立つ。それゆえ、もしすべての $A, g$ に関して、$\models_{A,g} \Gamma$ ならば、$\models_{A,g} \forall x \varphi(x)$ が成立する。このことは $\Gamma \models \forall x \varphi(x)$ が成り立つことを示している。（いまの推論では $\forall x(A \to B(x)) \to (A \to \forall x B(x))$ という推論が使われていることに注意。これはメタ言語での推論であり、$x$ が $A$ の自由変項でない限り問題はない。）

次に $\forall$-E、つまり

$$\dfrac{\dfrac{D}{\forall x \varphi(x)}}{\varphi(t)}$$

をチェックする。帰納法の仮定として $\Gamma \models \forall x \varphi(x)$、すなわち

すべての $A, g$ に関して、$\models_{A,g} \Gamma$ ならば、$\models_{A,g} \forall x \varphi(x)$

が成立する。したがって、$\models_{A,g} \Gamma$ が成り立つとすれば、その $A, g$ において $\models_{A,g} \varphi(d)$ が、すべての $d \in D_A$ について成り立つ。それゆえ、$I_{A,g}(t) = b \in D$ とすれば、$\models_{A,g} \varphi(t)$ が成立する。以上によって健全性が証明された。

### 完全性

ここで完全性として証明したいのは、次の model extension lemma と呼ばれるものである。

**定理 2** $\Gamma$ が無矛盾である *iff* $\Gamma$ はモデルをもつ。

これが、いわゆる完全性、

**定理 3** $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi$

とどうして同値になるのかをまずは見ておこう。定理3の左から右は健全性定理としてすでに証明されている。右から左が定理2から出てくるのは次のようにしてわかる。もし $\Gamma \models \varphi$ ならば、そのとき $\varphi$ は $\Gamma$ のすべてのモデルで妥当である。したがって $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ はモデルをもたない。それゆえ $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ は inconsistent である。したがって $\Gamma \vdash \varphi$ となる[7]。

逆に定理3から定理2が出てくるのを見るために、次の事実、

$\Gamma$ がモデルをもたない iff 任意の $\varphi$ について $\Gamma \models \varphi \wedge \neg\varphi$

に注意しよう。（どうしてこれが成り立つか考えてみよ。）$\Gamma \models \varphi \wedge \neg\varphi$ ならば、定理3により、$\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$、それゆえ $\Gamma$ は inconsistent である。このことと上の事実から定理2が導かれる。

さて、以上から定理2と定理3が同値であることがわかった。したがって、この後は定理2の証明に集中しよう。定理2の右から左、つまり「$\Gamma$ がモデルをもつならば $\Gamma$ は無矛盾である」は容易に示すことができる。$\Gamma$ がモデル $A$ をもつと仮定しよう。そのときもし $\Gamma$ が inconsistent ならば、（言語 L の式で）$\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ となるような $\varphi$ がある。健全性定理により $\models_A \varphi \wedge \neg\varphi$ が得られる。したがって、$\models_A \varphi$ かつ $\models_A \neg\varphi$、しかしこれは不可能である。したがって $\Gamma$ は無矛盾である。

ところが、定理2の左から右、「すべての無矛盾な文集合がモデルをもつ」を証明するのは容易ではない。その理由は、無矛盾な文集合 $\Gamma$ が与えられたとき、そこからどのようにモデルを構成すればよいか、モデルのための universe をどのように決めればよいのか、といった問題が生ずるためである。以下の基本方針は、こうである。まず、言語というのは記号の列の集合であることに注意しよう。その記号列の集合を用いて universe を構成してやればよい。より具体的には、当の言語の closed ターム（自由変項を含まないターム）から universe を構成しようというのである。しかしその場合、一つ問題がある。クローズドタームはその言語の定項と関数から作られる。しかしその言語に個体定項がない場合はどうするのか。そのためには、問題のない仕方で個体定項の集合をその言語に付け加え、その言語を拡大してやればよい。以下、そのやり方を見てゆこう。

証明の基本的な方針はこうである。

1. 与えられた理論 $T$ とその言語 $L$ に、定項記号 $\{c_0, c_1, \ldots\}$ を付け加えて言語を拡張し、さらに $T$ の式で $\exists x_i \varphi(x_i)$ という形の式があれば、$\exists x_i \varphi(x_i) \to \varphi(c_i)$ という形の公理を加えて理論を拡張し、拡張された言語 $L'$ と理論 $T'$ を構成する。

2. このような拡張を次々に繰り返して、理論 $T_H$ を得る。

3. さらに、こうして得られた理論 $T_H$ について、その単純完全拡大 complete simple extenstion$T*$ を構成する。（$T^*$ が $T$ の単純拡大というのは $T$ と $T*$ でともに言語が同じで、かつ $T \vdash \varphi \Rightarrow T^* \vdash \varphi$ の場合である。理論 $T$ が完全であるというのは、ここでは完全性の意味ではなく、その言語のすべての式 $\varphi$ について $T \vdash \varphi$ か $T \vdash \neg\varphi$ のいずれかが成立するようなもののことを言う。）

4. その上でこの $T*$ についてモデル $M*$ を構成する。

[7] 論証の最後のステップについて。まず、$\Gamma \vdash \varphi$iff$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ は inconsistent、が成立することに注意。これが成立することは次のようにして証明される。いま $\Gamma \vdash \varphi$ が成り立つとする。このとき、$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$ が成り立つ。また $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ が成り立つ。したがって $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ は inconsistent である。逆に $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ が inconsistent ならば、なんでも証明できるから、$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$ が成り立つ。このとき $\to$-I 規則により、$\Gamma \vdash \neg\varphi \to \varphi$ が導ける。$\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ を用いれば、$\Gamma \vdash \varphi$ が得られる。

5. 最後にこのモデル $M*$ を言語 $L$ に限定して得られるモデル $M* \uparrow L$ が理論 $T$ のモデルになっていることを示す。

**定義 9** *1.* 理論 $T$ は、$T \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in T$ となるような文の集まりである（つまり、理論は導出関係のもとで閉じている）。

*2.* $T = \{\varphi | \Gamma \vdash \varphi\}$ であるような集合 $\Gamma$ は、理論 $T$ の公理集合と呼ばれ、$\Gamma$ の元は公理と呼ばれる。

*3.* もし各文 $\exists x \varphi(x)$ に対して、$\exists x \varphi(x) \to \varphi(c) \in T$ であるような定項 $c$ が存在するならば、$T$ はヘンキン理論 *Henkin theory* と呼ばれる（このような $c$ を $\varphi(x)$ の $x$ に対する *witness* という）。

**定理 4** $\Gamma$ が（言語 $L$ における）無矛盾な理論ならば、次のような性質をもつ言語 $L' \supseteq L$ および無矛盾な理論 $\Gamma' \supseteq \Gamma$ が存在する。すなわち、言語 $L$ において $\exists y \varphi$ という形のすべての文に関して、定項記号 $c \in L'$ が存在し、$\exists y \varphi \to \varphi(y/c) \in \Gamma'$ となる。

証明：言語 $L$ の文で $\exists x \theta$ という形をもつものをすべて枚挙すると $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ になるとしよう。つまり、各自然数 $i$ に対して、$\varphi_i = \exists y_i \theta_i$ となるような式 $\theta_i$ と変数 $y_i$ がある、とするわけである。各々の $i$ に関して、特別な定項 $c_i$ を $L$ に付け加え、特別な公理 $\exists x \theta_i \to \theta_i(y/\mathrm{c})$ を $\Gamma$ に付け加えよう。すなわち、$L$ にはないそれぞれ異なる定項を $\{c_0, c_1, \ldots\}$ とし、さらに、

$$\Gamma' = \Gamma \cup \{\exists x \theta_i \to \theta_i(y_i/c_i) | i \in N\}$$

とするのである。示さなければならないのは、$\Gamma'$ が無矛盾だということである。そこで、$\Gamma'$ が矛盾すると仮定しよう。そのとき、$\Gamma'$ のある有限な部分理論が矛盾するのでなくてはならない（なぜなら、$\Gamma'$ が矛盾するということは $\Gamma' \vdash \varphi \wedge \neg \varphi$ が成立するということであり、そのときこの導出は有限の式の列にほかならない。この導出で使われる前提と結論からなる集合は $\Gamma'$ の有限部分集合になる）。したがって、ある $k$ が存在し、

$$\Gamma \cup \{\exists x \theta_i \to \theta_i(y_i/c_i) : i < k\}$$

が無矛盾であるとともに、

$$\Gamma \cup \{\exists x \theta_i \to \theta_i(y_i/c_i) : i < k\} \cup \{\exists x \theta_k \to \theta_k(c_k)\}$$

が矛盾するのでなくてはならない。

そこで $\Gamma*$ を

$$\Gamma \cup \{\exists x \theta_i \to \theta_i(y_i/c_i) : i < k\}$$

としよう。そのとき $\Gamma* \vdash \neg(\exists x \theta_k \to \theta_k(c_k))$。それゆえ、$\Gamma* \vdash \exists \theta_k \wedge \neg \theta_k(c_k)$。ゆえに $\exists x \theta_k$。一方、$\Gamma* \vdash \neg \theta_k(c_k)$ が成り立つのであるから、$\forall$-I により $\Gamma* \vdash \forall x \neg \theta_k(x)$[8]、しかしこれは矛盾である。それゆえ、$\Gamma'$ は無矛盾である。

さて、このようにして $\Gamma'$ を構成したが、$\Gamma'$ には $\Gamma$ にはない新たな定項が含まれている。だから、$\Gamma'$ ではそれらの新たな定項を用いて新たな論理式を構成することができる。その中には $\exists y \theta$ タイプの式があるかもしれない。そこでいまやった構成を繰り返す必要がある。

**定理 5** $\Gamma$ は言語 $L$ における無矛盾な理論であるとする。このとき $L_H \supseteq L$ であるような言語 $L_H$ と、$\Gamma_H \supseteq \Gamma$ であるような $\Gamma_H$ が存在し、しかも $\Gamma_H$ はヘンキン理論である。

[8] ここで $c_k$ が $\Gamma*$ で使われていないことに注意。なぜか。

証明　$L_0 = L$ かつ $\Gamma_0 = \Gamma$ とする。各々の $n$ について、前の定理と同様のやり方で、$\Gamma_{n+1}$ と $L_{n+1}$ を $\Gamma_n$ と $L_n$ から構成する。(つまり、$\Gamma_n$ が与えられたら、それから前の定理と同様の方法で $\Gamma'_n$ を作り、$\Gamma'_n = \Gamma_{n+1}$ とすればよい。} その上で、

$$\Gamma_H = \bigcup\{\Gamma_n | n \in N\}$$

とおくのである。明らかに $\Gamma_H$ はヘンキン理論である。したがって、あとは $\Gamma_H$ が無矛盾であることを示せばよい。そこで $\Gamma_H$ が矛盾すると仮定しよう。すると、矛盾する有限の部分集合が存在しなければならないから、ある $n$ について $\Gamma_n$ が矛盾しなくてはならない。しかし前の定理で示したように $\Gamma_n$ は無矛盾である。よって $\Gamma_H$ は無矛盾。

次のステップは、$\Gamma_H$ からその完全単純拡大 $\Gamma*$ を構成することである。

**定理 6** すべての無矛盾な理論は完全単純拡大 *complete simple extension* をもつ。

証明　$\Gamma$ が無矛盾だとしよう。$\Gamma$ の言語 $L$ の式をすべて枚挙したものを $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ としよう。次のようにして、$\Gamma$ から帰納的に完全な理論 $\Gamma*$ を作ることができる。

1. $\Gamma_0 = \Gamma$ とおく。
2. $\Gamma_n$ から $\Gamma_{n+1}$ を次のようにして構成する。すなわち、$\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ が無矛盾ならば、$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$、さもなければ $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$。
3. $\Gamma* = \bigcup\{\Gamma_n | n \in N\}$ とおく。

こうして $\Gamma = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \ldots \subset \Gamma_n \subset \ldots \subset \Gamma*$ が得られる。あとは、この $\Gamma*$ が無矛盾であることと完全であることを示せばよい。

まず、$\Gamma_n$ が無矛盾であることを示す。それを示すには、すべての $n$ について「もし $\Gamma_n$ が無矛盾ならば、$\Gamma_{n+1}$ が無矛盾である」を示せばよい。しかしこれは明かである。なぜなら、$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$ であるか、$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi\}$ かであり、後者はその構成法により無矛盾でなければならないからである。

そこで $\Gamma*$ が無矛盾であることを示そう。$\Gamma'$ を $\Gamma*$ の有限部分理論としよう。このとき、ある $n \in N$ が存在し、$\Gamma' \subseteq \Gamma_n$ でなければならない。なぜなら、さもなければ $\Gamma'$ は有限ではないことになるからである。$\Gamma_n$ は無矛盾だから、それより小さい $\Gamma'$ は無矛盾である。よって、コンパクト性により[9]$\Gamma*$ は無矛盾である。

$\Gamma*$ が完全であることを見よう。$\varphi$ を $L$ の式とする。ある $n$ に関して $\varphi = \varphi_n$ である。もし $\varphi_n \in \Gamma*$ ならば、$\Gamma* \vdash \varphi_n$ である。もし $\varphi_n \in \Gamma*$ でないならば、$\Gamma*$ の構成法により $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ は矛盾していなくてはならない。したがって、$\Gamma_n \vdash \neg\varphi_n$、ゆえに $\Gamma* \vdash \neg\varphi_n$。

すでに $\Gamma_H$ が無矛盾であることは示されているのだから、$\Gamma_H$ はその完全単純拡大 $\Gamma*$ をもつ。また、$\Gamma*$ は $\Gamma_H$ の単純拡大だから、$\Gamma*$ はヘンキン理論でもある。そこで、$\Gamma*$ がモデル $M*$ を持つことを示そう。それには $\Gamma*$ の言語 $L*$ を使って、次のようにしてモデルを構成してしまえばよい。

1. universe $A = \{t \in L* | t \ is \ closed\}$
2. もし $c$ が $L*$ の定項記号ならば、$c^{M*} = [c]$
3. もし $\tau$ が $L*$ のクローズドタームで、$\mathbf{F}$ が $n$-項関数ならば、

$$\mathbf{F}^{M*}([\tau_1] \ldots [\tau_n]) = [\mathbf{F}\tau_1 \ldots \tau_n]$$

[9] $\Gamma$ が無矛盾である iff $\Gamma$ のあらゆる有限部分理論は無矛盾である。

4. もし $\mathbf{R}$ が $n$-項述語ならば、

$$([\tau_1]\ldots[\tau_n]) \in \mathbf{R}^{M*} \text{ iff } \Gamma* \vdash \mathbf{R}\tau_1\ldots\tau_n$$

ただし、ここで $[\tau]$ は、$L*$ のクローズドタームの $\tau$ の同値類を表わすとする。つまり、モデルにおいては $=$ をどう解釈するかがつねに問題になる。ここでは上で定義した $A$ の上で、

$$\tau \sim \mu \text{ iff } \Gamma* \vdash \tau = \mu$$

とおき、この $\sim$ 関係を用いて[10] $A$ の上の同値類を定義するのである。しかし、この同値関係による等号の解釈がうまくいっているのかどうか、例えば、$\tau \in [\mu]$ ならば、$[\tau] = [\mu]$ となるはずだが、このとき果たして $\mathbf{F}^{M*}([\mu])$ と $\mathbf{F}^{M*}([\tau])$ が等しくなるかどうか、が問題になる。これがうまくいっていることを示さなくてはならないが、それは次のようにして示される。(以下で $\mathbf{F}$ は一項関数とする。)

$$\begin{array}{rcl}
[\tau] = [\mu] & \Rightarrow & \tau \sim \mu \\
& \Rightarrow & \Gamma* \vdash \tau = \mu \\
& \Rightarrow & \Gamma* \vdash \mathbf{F}\tau = \mathbf{F}\mu \\
& \Rightarrow & \mathbf{F}\tau \sim \mathbf{F}\mu \\
& \Rightarrow & [\mathbf{F}\tau] \sim [\mathbf{F}\mu] \\
& \Rightarrow & \mathbf{F}^{M*}([\tau]) = \mathbf{F}^{M*}([\mu])
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
[\tau] = [\mu] & \Rightarrow & \tau \sim \mu \\
& \Rightarrow & \Gamma^* \vdash \tau = \mu \\
& \Rightarrow & \Gamma^* \vdash \mathbf{R}\tau \Leftrightarrow \mathbf{R}\mu \\
& \Rightarrow & \Gamma^* \vdash \mathbf{R}\tau \quad \text{iff} \quad \Gamma^* \vdash \mathbf{R}\mu \\
& \Rightarrow & [\tau] \in \mathbf{R}^{M^*} \quad \text{iff} \quad [\mu] \in \mathbf{R}^{M^*}
\end{array}$$

さて、そこで $M* \models \Gamma^*$ を示そう。

**定理 7** もし $\tau$ が $L*$ のクローズドタームならば、$\tau^{M*} = [\tau]$

証明　$\tau$ の複雑さについての帰納法による。$\tau$ は変項を含んでいないから、それは定項記号であるか、$\mathbf{F}\tau_1\ldots\tau_n$ という形をもつかのいずれかである。$\tau$ が定項記号の場合は定義により明らか。$\tau$ が $\mathbf{F}\tau_1\ldots\tau_n$ という形をもつ場合は次のようになる。

$$\begin{array}{rcll}
\tau^{M^*} & = & (\mathbf{F}\tau_1\ldots\tau_n)^{M^*} & \\
& = & \mathbf{F}^{M^*}((\tau_1)^{M^*}\ldots(\tau_n)^{M^*}) & \text{解釈の定義} \\
& = & \mathbf{F}^{M^*}([\tau_1]\ldots[\tau_n]) & \text{帰納法の仮定} \\
& = & [\mathbf{F}\tau_1\ldots\tau_n] & \mathbf{F}^{M^*} \text{ の定義} \\
& = & [\tau] &
\end{array}$$

**定理 8** もし $\varphi$ が $L^*$ の文ならば、$\Gamma^* \vdash \varphi$ *iff* $M^* \models \varphi$

$\varphi$ についての帰納法による。

もし $\varphi$ が atomic ならば、$\varphi \equiv \mathbf{R}\tau_1,\ldots\tau_n$ か $\varphi \equiv \tau_1 = \tau_2$ かのいずれかである。

$$\begin{array}{rcl}
\Gamma^* \vdash \varphi & \text{iff} & \Gamma^* \vdash \mathbf{R}\tau_1,\ldots\tau_n \\
& \text{iff} & ([\tau_1]\ldots[\tau_n]) \in \mathbf{R}^{M^*} \\
& \text{iff} & ((\tau_1)^{M^*}\ldots(\tau_n)^{M^*}) \in \mathbf{R}^{M^*} \\
& \text{iff} & M^* \models \mathbf{R}(\tau_1,\ldots\tau_n) \\
& \text{iff} & M^* \models \varphi
\end{array}$$

[10] $\sim$ 関係は同値関係になる。

$$
\begin{aligned}
\Gamma^* \vdash \varphi \quad & \text{iff} \quad \Gamma^* \vdash \tau = \mu \\
& \text{iff} \quad \tau \sim \mu \\
& \text{iff} \quad [\tau] = [\mu] \\
& \text{iff} \quad \tau^{M^*} = \mu^{M^*} \\
& \text{iff} \quad M^* \models \tau = \mu \\
& \text{iff} \quad M^* \models \varphi
\end{aligned}
$$

$\varphi$ が $\neg\psi$ のとき、

$$
\begin{aligned}
\Gamma^* \vdash \varphi \quad & \text{iff} \quad \Gamma^* \vdash \neg\psi \\
& \text{iff} \quad \Gamma^* \nvdash \psi \\
& \text{iff} \quad \Gamma^* \not\models \psi \\
& \text{iff} \quad M^* \models \neg\psi \\
& \text{iff} \quad M^* \models \varphi
\end{aligned}
$$

$\varphi$ が $\psi \wedge \chi$ のとき、

$$
\begin{aligned}
\Gamma^* \vdash \varphi \quad & \text{iff} \quad \Gamma^* \vdash \psi \wedge \chi \\
& \text{iff} \quad \Gamma^* \vdash \psi \text{ and } \Gamma^* \vdash \chi \\
& \text{iff} \quad \Gamma^* \models \psi \text{ and } \Gamma^* \models \chi \\
& \text{iff} \quad M^* \models \psi \wedge \chi \\
& \text{iff} \quad M^* \models \varphi
\end{aligned}
$$

$\varphi$ が $\forall x\psi$ のとき、

ここで、$\Gamma^*$ がヘンキン理論であるという性質を使う。まず、$L^*$ のすべてのクローズドターム $\tau$ に対して、$\Gamma^* \vdash c = \tau$ となる定項 $c$ がある。(なぜなら、$\tau$ に対して $\exists x x = \tau$ は $\Gamma^*$ の式であるが、$\Gamma^*$ はヘンキン理論なので、$\Gamma^* \vdash \exists x x = \tau \to c = \tau$ が成立し、ゆえに $c = \tau$ である。)

その上で $\Gamma^* \vdash \forall x\psi$ と仮定する。このとき、$\Gamma^* \vdash \psi(x/\tau)$ が任意のクローズドタームについて成立する。帰納法の仮定により、

$$
\begin{aligned}
& M^* \models \psi(x/\tau) \quad \text{for all closed } \tau \\
& (\text{または } M^* \models \psi(x/m) \quad \text{for all closed } \tau \text{ such that } m = \tau)
\end{aligned}
$$

よって定義により、$M^* \models \forall x\psi$.

逆に、$M^* \models \forall x\psi$ とする。

ところで $\Gamma^*$ には $\exists x\neg\psi \to \neg\psi(x/c)$ という公理が入っている。つまり、(1) $\Gamma^* \vdash \exists x\neg\psi \to \neg\psi(x/c)$ である。この $c$ についても (2) $M^* \models \psi(x/c)$ が成立する。

(1) の対偶をとると、

$$\Gamma^* \vdash \psi(x/c) \to \neg\exists x\neg\psi \quad \text{—(3)}$$

(2) より、帰納法の仮定から

$$\Gamma^* \vdash \psi(x/c) \quad \text{—(4)}$$

(3) と (4) とから、

$$\Gamma^* \vdash \neg\exists x\neg\psi$$

が得られるが、これは $\Gamma^* \vdash \forall x\psi$ と同値。したがって

$$M^* \models \forall x\psi \Leftrightarrow \Gamma^* \vdash \forall x\psi$$

が示された。

以上から $M^* \models \Gamma^*$ が示された。最後に次のものを示そう。

**定理 9** $\Gamma$ と $\Gamma'$ がそれぞれ $L$ および $L'$ の上の理論だとしよう。そして $\Gamma'$ が $\Gamma$ の拡大であり、$L'$ が $L$ の拡大であるとする。また $M'$ が $\Gamma'$ のモデルであるとしよう。このとき、$M' \upharpoonright L$ は $\Gamma$ のモデルである。

**定義 10** $L$ をある言語、$L'$ を $L$ の拡張とする。つまり $L$ の方が $L'$ よりも定項記号や関数記号や述語記号の点で少ないとする。いま $M$ を $L$ の一つのモデルとし、$M'$ を $L'$ の一つのモデルとするとき、以下の条件を満たすならば、$M'$ は $M$ の拡張 *expansion*（$M$ は $M'$ の限定）と呼ばれる。

- $A = A'$
- $L$ のすべての述語はまた $L'$ の述語であり、$\mathbf{R}^M = \mathbf{R}'^{M'}$ である。
- $L$ のすべての関数はまた $L'$ の関数であり、$\mathbf{F}^M = \mathbf{F}'^{M'}$ である。
- $L$ のすべての定項はまた $L'$ の定項であり、$\mathbf{c}^M = \mathbf{c}'^{M'}$ である。

上の定理を証明するには、この定義に依拠して以下を示せばよい。

**定理 10** $M = M' \upharpoonright L$ とする。このとき次が成立する。

1. （言語 $L$ における）$M$ のあらゆるクローズドターム $\tau$ に関して、$\tau^M = \tau^{M'}$
2. （言語 $L$ における）$M$ のあらゆる式 $\varphi$ に関して、$M \vdash \varphi \quad \text{iff} \quad M' \vdash \varphi$
3. $M \models \Gamma$

これらは先の定義に基づいて、タームおよび式についての帰納法によって容易に示すことができる。

以上から model extension lemma すなわち一階の述語論理の完全性が証明された。