1.　自然演繹の体系 (Naturau Deduction System, N-system)

以下では、命題論理および一階述語論理のいくつかの体系を比較して、それぞれの体系がもつ特徴を考えてみたい。最初に、自然演繹の体系を取り上げる。

1.1　一階述語論理の言語

一階の述語論理のための標準的な言語は、$\vee, \wedge, \rightarrow, \perp, \forall, \exists$ を論理結合子（論理演算子）として含み、可算無限個の、個体変項、n-項関係記号、n-項関数記号、命題文字（命題変数）、個体変項を含んでいる。

R を関係記号、$t_1, \ldots, t_n$ をタームとするとき、$Rt_1 \ldots t_n$ を原子式 atomic formula という。

以下では、上記のカテゴリーの記号としてそれぞれ次のようなものを使用する。

- 個体変項: $x, y, z, u, v, w, \ldots$
- 関数記号: $f, g, h, \ldots$
- 個体定項: $c, d, \ldots$
- 任意のターム: $t, s, r, \ldots$
- 原子式: $P, Q, \ldots$
- 関係記号: $R, \ldots$
- 任意の式: $A, B, C, D, \ldots$

1.2　直観主義論理の自然演繹体系

直観主義論理というのは、古典論理の体系の部分系である。この体系では、通常の二値意味論（真理関数的意味論）で妥当とされる命題、例えば $A \vee \neg A$ とか、$\neg\neg A \rightarrow A$ のような命題は証明できない。しかし、直観主義論理の N-system にはいろいろと重要な特徴があり、それを見るためにもこの体系はきちんと押さえておかなくてはならない[1]。

[1] ここで、誤解のないように一言注意。プリントの最初で、いろいろな体系を比較すると言ったが、それには二つの意味がある。一つは、証明のシステムを、例えば N-system に固定して、その上で、古典論理と直観主義論理、あるいは直観主義と最小論理を比較するという意味である。もう一つは、論理として、例えば直観主義論理を固定した上で、その証明を表現するシステムとして N-system や Hilbert-style の system や Gentzen-system を比較するという意味である。この場合、どのシステムをとっても、証明できるものの範囲が変わるわけではない。その意味では、どのシステムも同等なのである。しかし、以下で明らかにされるように、それらのシステムは、証明できるものの範囲以外の点で異なる様々な性質をもつ。以下での関心は、主としてこれらの性質、つまり上の二つの意味で言えば、後者の意味にある。

導入則 (Introduction rules)

$$\frac{A \quad B}{A \land B}\ (\land - \mathrm{I})$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \to B}\ (\to -\mathrm{I})$$

$$\frac{A}{A \lor B}\ (\lor - \mathrm{I}_r) \qquad \frac{B}{A \lor B}\ (\lor - \mathrm{I}_l)$$

$$\frac{\varphi(x)}{\forall x\varphi(x)}\ (\forall - \mathrm{I})$$

$$\frac{\varphi(t)}{\exists x\varphi(x)}\ (\exists - \mathrm{I})$$

除去則 (Elimination rules)

$$\frac{A \land B}{A}\ (\land - \mathrm{E}_r) \quad \frac{A \land B}{B}\ (\land - \mathrm{E}_l)$$

$$\frac{A \to B \quad A}{B}\ (\to -\mathrm{E})$$

$$\frac{A \lor B \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\ (\lor - \mathrm{E})$$

$$\frac{\forall x\varphi(x)}{\varphi[t/x]}\ (\forall - \mathrm{E})$$

$$\frac{\exists x\varphi(x) \qquad \begin{array}{c}[\varphi(x)]\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\psi}\ (\exists - \mathrm{E})$$

以上の 10 個の規則に、次の二つの規則

$$\frac{A \quad \neg A}{\perp}\ (\neg - \mathrm{E}) \qquad \frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{\neg A}\ (\neg - \mathrm{I})$$

を加えてできる体系は、最小論理 (minimal logic) と呼ばれる体系である。しかし、以上の規則だけからは、例えば、$\neg P \to (P \to Q)$ や $P \lor Q, \neg P \vdash Q$ は証明できない。そこで、次の規則を付け加える。

$$\frac{\perp}{A}\ (\perp)$$

これは、ここでは $(\perp)$ と呼ばれているが、通常 ex falso sequitur quodlibet と呼ばれる悪名高い規則である[2]。しかし、直観主義論理ではこの規則を採用する。この規則を採用し、例えば $\perp \equiv A \lor \neg A$ のように定義することにしてやるか、あるいは $\neg A \equiv A \to \perp$ と定義し、否定の除去則を $(\to -\mathrm{E})$ に還元してしまえば、先の $\neg$ に関する二つの規則は必要ない。したがって、最初に一覧した 10 個の規則に $(\perp)$ をあわせた 11 の規則からなる体系が直観主義論理の体系になる。

[2]悪名が高いのは、この規則が material implication のパラドクスと言われるものの原因をなしているからである。

1.3 直観主義論理の N-system における導出の例

以下では、直観主義論理の N-system を **Ni** と呼ぶことにする。とりあえず、この体系での証明の一例を見てみよう。（最初は命題論理の範囲の規則だけを使った証明に話を限定する。量化子の規則、その変項条件については後で見る。）

例 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to (B \to C)]^1 \qquad [A]^3}{B \to C} \to E \quad \dfrac{[A \to B]^2 \qquad [A]^3}{B} \to E}{C} \to E}{A \to C} \to I_3}{(A \to B) \to (A \to C)} \to I_2}{(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))} \to I_1$$

これは、$\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ の演繹 deduction（あるいは導出 derivation）である。この導出を構成するときのアイデアは、逆算とか下からのサーチなどと呼ばれている。すなわち、われわれには $\to -I$ の規則

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}\ (\to \mathrm{I})$$

があるのだから、$\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ を導出するにあたっては、まず $(A \to (B \to C))$ を仮定して、$((A \to B) \to (A \to C))$ を導けばよい。次は何をすべきであろうか。今度は、$((A \to B) \to (A \to C))$ の導出を考えなくてはならない。そこでふたたび同じ方針を採用し、$A \to B$ を仮定して、$A \to C$ を導くことを考えればよい。最後に、$A \to C$ を導出するために、A を仮定して、C を導くことを考えればよい。

問題 1

(1) $\vdash (A \land B) \to (B \land A)$

(2) $\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \land B) \to C)$

(3) $\vdash A \to \neg\neg A$

(4) $\vdash (A \land B) \lor C \to (A \lor C) \land (B \lor C)$

(5) $\vdash (A \lor C) \land (B \lor C) \to (A \land B) \lor C$

上の (4) と (5) から、次のようにして $(A \land B) \lor C \leftrightarrow (A \lor C) \land (B \lor C)$ が証明できる。

$$\dfrac{\begin{array}{cc} [(A \vee C) \wedge (B \vee C)] & [(A \wedge B) \vee C] \\ \mathcal{D} & \mathcal{D}' \\ (A \wedge B) \vee C & (A \vee C) \wedge (B \vee C) \end{array}}{(A \wedge B) \vee C \leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)}$$

例 2(仮定の cancellation について)

$$\dfrac{[A]^1}{A \to A} \to I_1$$

この推論は、いささか奇妙に見えるかもしれないが、N-system におけるまともな導出である。それをきちんと押さえることが N-system の特徴を理解するのには重要である。まず、最初に、N-system の規則は、いずれもが具体的な規則ではなく、規則の図式 (scheme) であることをはっきりと理解すべきである。それは、まず第一に、規則に登場する文字 A, B 等が、具体的な式ではなく、図式文字になっていることからわかるが、もう一つ注意すべきことがある。例えば、

$$\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B}$$

という推論図式は、通常はもっと大きな導出の一部分として登場する。そのもっと大きな導出では、別の前提や仮定があって、例えば A の導出はそれらに依存しているかもしれない。しかし、この推論図では、$A \wedge B$ を導出するのに必要な前提として A, B だけが言及されている。つまり、この推論図式においていま active な前提だけが登場しているのである。しかし、実際には前提 A, B を導くために、他の前提や仮定が使われているかもしれないのだから、より実情に即して書けば、この推論図式は次のようになる。

$$\dfrac{\begin{array}{cc} \Gamma & \Delta \\ \mathcal{D} & \mathcal{D}' \\ A & B \end{array}}{A \wedge B}$$

その上で、この図式の $\mathcal{D}$ の部分を$\vdash$と書き、図式に現れる各式が依存する前提や仮定を余すところなく書き出すとすれば、$\wedge$-I 規則は次のようになる[3]。

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma \cup \Delta \vdash A \wedge B}$$

さて、同じ要領で、$\to$-I 規則を書き換えてみると次のようになる。

$$\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma - \{A\} \vdash A \to B}$$

[3]図の $\Gamma \cup \Delta$ の $\cup$ は集合の和を表す。

この導出の上段に A が登場しないのは、それが Γ に含まれているからである。下段の $\Gamma - \{A\}$ は、Γ から A を取り除いたことを表している。

ここでもう一度最初の例に戻ろう。例 2 の導出は、上の要領に従えば、

$$\frac{A \vdash A}{\vdash A \to A}$$

となる。つまり、自然演繹においては、$[A]$ と仮定することは、それだけで $A \vdash A$ を表しているのである。この場合 $\Gamma = \{A\}$ であり、その Γ から A を取り除けば空になるから、下段の $\vdash$ の前には何も書かれていない[4]。

例 3

$$\dfrac{\dfrac{[A]}{B \to A}\to I_1}{A \to (B \to A)}\to I_1$$

ポイントは、最初の →-I の適用において、仮定が落とされていないという点にある。それに問題がないことは、次のように示すことができる。

$$\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A \vdash B \to A}\to I}{\vdash A \to (B \to A)}\to I$$

このとき、二段目の仮定 A から B を差し引いたものは、ふたたび A であるから、これによってこの導出は正当化される。このような B のケースは vacuous discharge と言われる。

問題 2

(1) ∨-E 規則を上の要領で、sequent calculus style に書き換えよ。

(2) 例 3 の B を A に置き換えて、その導出を検討せよ。

例 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to (A \to B)]^2 \quad [A]^1}{A \to B}\to E \qquad [A]^1}{B}\to E}{A \to B}\to I_1}{(A \to (A \to B)) \to (A \to B)}\to I_2$$

この例で特徴的なのは、下から二つ目の →-I の適用において、番号 1 の付いた仮定が二つ同時に discharge されている点である。同じ式からなる仮定を同時に複数箇所で落とすことは、自然演繹では許されている。ただし、そのためには、→-I の適用場所において、それより上の証明図をサーチしなくてはならない。これを、自然演繹における導出の非局所性という。もし上の推論を sequent style に書き換えるならば、そうした非局所性は消える。

[4] 本来は、上段は $\{A\} \vdash A$ と書かれるべきだが、括弧は落としてある。以下もこの約束に従うこととする。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to (A \to B)) \vdash A \to (A \to B) \qquad A \vdash A}{A \to (A \to B), A \vdash A \to B} \qquad A \vdash A}{A \to (A \to B), A \vdash B}\to E}{(A \to (A \to B)) \vdash (A \to B)}\to I}{\vdash (A \to (A \to B)) \to (A \to B)}\to I$$

1.4 量化子の規則

次に、直観主義論理の自然演繹体系における量化の規則を検討する。まず、ターム（項）を定義する。

タームの定義

1. 個体定項 constant はタームである。
2. 変項はタームである。
3. ターム $t_1, \ldots, t_n$ に n-項関数 f^n を適用してできる $f^n(t_1 \ldots t_n)$ はタームである。

ターム t における**自由変項** free variable の集合 $FV(t)$ の定義

1. $t = a$ のとき、$FV(a) = \phi$,
2. $t = x$ のとき、$FV(x) = \{x\}$,
3. $t = f^n(t_1, \ldots, t_n)$ のとき、$FV(f^n(t_1, \ldots, t_n)) = FV(t_1) \cup \ldots \cup FV(t_n)$.

式 A における自由変項の集合 $FV(A)$ の定義

1. $FV(\perp) = \phi$,
2. $FV(P(t_1 \ldots t_n)) = FV(t_1) \cup \ldots \cup FV(t_n)$,
3. $FV(A \wedge B) = FV(A \vee B) = FV(A \to B) = FV(A) \cup FV(B)$,
4. $FV(\forall x A) = FV(\exists x A) = FV(A) - \{x\}$.

次にタームや式において、その中に現れる変項 x に対する別のターム t' の代入を考える。x に対する t' の代入を $[t'/x]$ のように表記する。このとき、例えばターム t の x に t' を代入することを $t[t'/x]$ と書く。

タームにおける**代入** $[t/x]$

1. $a[t/x] = a$,
2. もし $y \neq x$ ならば、$y[t/x] = y$, もし $y = x$ ならば、$y[t/x] = t$,

3. $f^n(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = f^n(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$.

式における**代入** $[t/x]$

1. $\perp [t/x] = \perp$,
2. $(P^n(t_1, \ldots, t_n))[t/x] = P^n(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$,
3. $\circ = \wedge, \vee, \rightarrow$ のとき、$(A \circ B)[t/x] = A[t/x] \circ B[t/x]$,
4. もし $y \neq x$ ならば、$(\forall yA)[t/x] = \forall yA(t/x)$, もし $y = x$ ならば、$(\forall yA)[t/x] = \forall yA$
5. もし $y \neq x$ ならば、$(\exists yA)[t/x] = \forall yA(t/x)$, もし $y = x$ ならば、$(\exists yA)[t/x] = \forall yA$

[重要]：以下において、「ターム t は、式 A において x に関して自由である」という言い回しを使う。これは、式 A の中の x に t を代入した結果として、t に含まれるいかなる変項も束縛されることはない、ということを意味する。具体例で考えよう。いま式 A として $\forall y \exists x(y < x)$ を考えよう。これは、「どんな y をとっても、それより大きい x がある」ということだから、自然数列のような、最大元をもたない線形に順序づけられた集合を考えれば、妥当になる。しかし、最初の量化子を落として、y にターム x を代入したとしよう。このとき、できあがる式 $\exists x(x < x)$ は、もはや上の集合のもとでは妥当ではない[5]。例：1.z は、式 $\exists xP(y, x)$ において y に関して自由である。2.$f(x_0, x_1)$ は、式 $\exists x_1 P(x_0, x_3)$ において、x_0 に関して自由ではない。3.z は、式 $P(x, y) \rightarrow \exists xQ(x, w)$ において x に関して自由である。

さて、以上の準備の下で、量化子に関する規則を見てみよう。直観主義論理においては、量化子の意味は次のように説明される。

1. $\forall xA$ の直接証明は、任意の y に対する $A[y/x]$ の証明からなる。
2. $\exists xA$ の直接証明は、ある個体 a に対する $A[a/x]$ の証明からなる。

これに基づいて、量化子の導入規則はそれぞれ次のようになる。

$$\frac{A(y/x)}{\forall xA}\ \forall\mathrm{I} \qquad \frac{A(t/x)}{\exists xA}\ \exists\mathrm{I}$$

このうち、最初の $\forall I$ 規則には、変項に関する制約がある ($\exists I$ 規則の方は、t が任意のタームであればよい[6]。)。

[5]最初の量化子を落とした式 $\exists x(y < x)$ の y に、どうしても x を含むタームを代入したい場合は、自由変数の改名 rename を行って、例えば $\exists z(y < z)$ のようにしてやればよい。

[6]ただし、t は A において x に関して自由でなくてはならない。

> y は、$A(y/x)$ が依存するどの仮定にも自由変項として現れてはならないし、$\forall xA$ にも自由変項として現れてはならない。

この制約は、本質的に証明の一部をなす重要な制約だということをはっきり認識する必要がある。例えば、

$$\frac{[A(y/x)]}{\forall xA}\ \forall I$$

という、ただこれだけの演繹を考えてみよう。上式の $A(y/x)$ は、何か他のものから導出されたわけではなく、それ自身が仮定なのであるから、$A(y/x)$ は $A(y/x)$ 自身に依存すると考えられる。したがって、この推論は上の制約に対する違反事例となっている。一方、

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\forall x\forall yA(x,y)]^1}{\forall yA(x,y)}\ \forall E}{A(x,y)}\ \forall E}{\forall xA(x,y)}\ \forall I}{\forall y\forall xA(x,y)}\ \forall I}{\forall x\forall yA(x,y)\to\forall y\forall xA(x,y)}\ \to I_1$$

における最初の $\forall I$ の適用では、その前提である $A(x,y)$ は、仮定 $[\forall x\forall yA(x,y)]$ に依存している。この場合、この仮定の x は束縛されており、自由な出現はないから、上の制約を満足しているのである。

除去則の方も見ておこう。$\forall E$ 規則は次のようになる。

$$\frac{\forall xA}{A(t/x)}\ \forall E$$

ここで t は任意のタームであり、このタームの選択には何の制約もない[7]。一方、$\exists E$ 規則はやや複雑である。

$$\frac{\exists xA \qquad \begin{matrix}[A(y/x)]^n\\ \mathcal{D}\\ C\end{matrix}}{C}\ \exists E_n$$

この規則には変項に関する制約がある。

> この規則における y は、C および $\exists xA$ において自由変項として現れてはならない。また、仮定 $[A(y/x)]$ から C の導出において依存するもののうち、$[A(y/x)]$ を除いた他の式に自由変項として現れてはならない。

[7] ただし、上で述べたように t は、式 $\forall xA$ において x に関して自由でなくてはならない。さもなくば、$\forall x\neg\forall y(x=y)\vdash\neg\forall y(y=y)$ のような導出が許されてしまうからである。

いくつかの導出の例を見てみよう。いま、$x \notin FV(A)$ と仮定する。このとき、$\forall x(A \to B(x)) \to (A \to \forall x B(x))$ を証明することができる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x(A \to B(x))]^1}{A \to B(x)}\,\forall E \qquad [A]^2}{B(x)}\,\to E}{\forall x B(x)}\,\forall I}{A \to \forall x B(x)}\,\to I_2}{\forall x(A \to B(x)) \to (A \to \forall x B(x))}\,\to I_1$$

今度は、$x \notin FV(B)$ と仮定する。$\forall x(A(x) \to B) \to (\exists x A(x) \to B)$ の導出は次のようになる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x A(x)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall x(A(x) \to B)]^3}{A(x) \to B}\,\forall E \qquad [A(x)]^1}{B}\,\to E}{B}\,\exists E_1}{\exists x A(x) \to B}\,\to I_2}{\forall x(A(x) \to B) \to (\exists x A(x) \to B)}\,\to I_3$$

問題 3

以下を示せ。

(1) $\vdash \exists x(A(x) \vee B(x)) \to \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$,

(2) $\vdash \forall x(A(x) \to B(x)) \to (\forall x A(x) \to xB(x))$,

(3) $\vdash \forall x A(x) \to \neg\forall\neg A(x)$,

(4) $\vdash \exists x(A(x) \wedge B) \leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$, ただし、$x \notin FV(B)$ とする。

さて、次のような導出を考えてみよう。

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(x = x)}{x = x}\,\forall E}{\exists y(x = y)}\,\exists I$$

この導出は許されるであろうか。実は許されるのである。代入を行うときに、変数のすべての出現、現れ occurrences に対して、同時に代入を行うこともできるが、その一方で、それらのある現れに対してだけ代入を行うこともできるのである。

以上で、直観主義論理の自然演繹体系は完結する。この体系のさらなる性質を検討する前に、古典論理の自然演繹体系を見ておこう。

1.5 古典論理の自然演繹体系

古典論理の体系を得るには、最初の 10 の規則に、次の (RAA) と呼ばれる規則

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg A]\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{A}\ (RAA)$$

を付け加えればよい。これは、先の $(\neg - \mathrm{I})$ によく似ているが、同じではないことに注意する必要がある。(RAA) は、いわば $(\neg - \mathrm{I})$ と二重否定の除去、すなわち、$\neg\neg P \vdash P$ をあわせた規則と見ることができる。したがって、ここから逆に、(RAA) の代わりに、否定の導入則・除去則に加えて、二重否定の除去を付け加えることによっても古典論理が得られる。

古典論理では、もちろん $\vdash \neg\neg P \leftrightarrow P$ であるけれども、直観主義でも $\vdash P \to \neg\neg P$ は証明できるという事実には注意を払う必要がある。古典論理における導出の実例をいくつか挙げておく。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A \vee \neg A}\vee I \quad [\neg(A \vee \neg A)]^2}{\bot}\to E}{\neg A}\to I_1}{A \vee \neg A}\vee I \qquad [\neg(A \vee \neg A)]^2}{\bot}\to E}{A \vee \neg A}\mathrm{RAA}_2$$

次は、$\vdash (A \to B) \vee (B \to A)$ の導出である。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]^1}{A \to B}\to I_1}{(A \to B) \vee (B \to A)}\vee I \quad [\neg((A \to B) \vee (B \to A))]^2}{\bot}\to E}{B}\bot}{A \to B}\to I_1}{(A \to B) \vee (B \to A)}\vee I \qquad [\neg((A \to B) \vee (B \to A))]^2}{\bot}\to E}{(A \to B) \vee (B \to A)}\mathrm{RAA}_2$$

次は、$\vdash \neg\forall x \neg A(x) \to \exists x A(x)$ の導出である。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\forall x \neg A(x)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\exists x A(x)]^2 \quad \dfrac{[A(x)]^3}{\exists x A(x)}\exists I}{\bot}\neg E}{\neg A(x)}\neg I_3}{\forall x \neg A(x)}\forall I}{\bot}\to E}{\exists x A(x)}\mathrm{RAA}_2}{\neg\forall x \neg A(x) \to \exists x A(x)}\to I_1$$

問題 4

以下を示せ。

(1) $\vdash \exists x A(x) \to \neg \forall x \neg A(x)$,

(2) $\vdash \neg\neg A \to A$,

(3) $\vdash A \vee B \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$,

(4) $A \vdash \neg(\neg A \wedge B)$,

(5) $\vdash ((A \to B) \wedge (A \to \neg B)) \to \neg A$

ゲンツェン・システム（G-system, Sequent Calculus)

自然演繹からゲンツェン・システムへ

　これから見る G-system と呼ばれる体系は、自然演繹でわれわれが行っている導出をメタレベルから記述した体系だと説明されることがある。これがどういうことなのかをまずは考えてみたい。先に、仮定の cancellation を説明したときに、例えば $\wedge$-I 規則は、すべての前提を explicit に表記することにすれば、

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\Gamma & \Delta \\ \mathcal{D} & \mathcal{D}' \\ A & B\end{array}}{A \wedge B}$$

のようになり、これが、

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma \cup \Delta \vdash A \wedge B}$$

のように書けることを見てきた。ここで使われている $\vdash$ 記号は導出関係を表すメタ記号だから、G-system 内で使われる記号として $\Rightarrow$ を用いることにすれば、これは、

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma \cup \Delta \Rightarrow A \wedge B}$$

と書き表すことができる。

　こうして、自然演繹の導入則は、G において右規則 right rules と呼ばれるものに対応することがわかる[8]。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \wedge B}\ R\wedge \qquad \dfrac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B}\ R\to \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}\ R\vee_1 \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}\ R\vee_2$$

　一方、G の左規則は、N-system の除去則に対応するのだが、それには若干の説明が必要になる。まず、$\vee$ に関する左規則は、

$$\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow C \quad B, \Delta \Rightarrow C}{A \vee B, \Gamma, \Delta \Rightarrow C}\ L\vee$$

となるが、これが $\vee$-E

[8] しかしながら、ここに提示されている規則、例えば、$R\wedge$ は、

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \wedge B}\ R\wedge$$

であり、後の **G1** システムで提示されている $R\wedge$ は、

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

であり、大まかに似ているが細かいところでは違いがある。この相違については、p.17 の (3) を参照されたい。

$$\dfrac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ (\vee - \mathrm{E})$$

に対応することは容易に見て取れると思う。

しかしながら、G における $\wedge$ と $\rightarrow$ の左規則は、それぞれ次のようになっている。

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow C}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C}\ L\wedge \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad B, \Delta \Rightarrow C}{A \rightarrow B, \Gamma, \Delta \Rightarrow C}\ L \rightarrow$$

これらが、それぞれ

$$\frac{A \wedge B}{A}\ \wedge\mathrm{E}_r \quad \frac{A \wedge B}{B}\ \wedge\mathrm{E}_l \qquad \frac{A \rightarrow B \quad A}{B}\ \rightarrow \mathrm{E}$$

に対応しているのを見て取るのはむずかしい。実は、$\wedge$ の除去則は、もっと一般的に書くことができる。それには、$A \wedge B$ から任意の式 C が導出できるのはどういうケースかを考えてみればよい。もし $A \wedge B$ からある式 C が導出できるとすれば、その C は、$A \wedge B$ そのものを導出するのに使われた resouce から導出できるはずである。ところで、$A \wedge B$ を導出するための直接の根拠は、$\wedge$ の導入則

$$\frac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_2\\ B\end{matrix}}{A \wedge B}$$

によって与えられているのだから、この事実を踏まえて $\wedge$ の導入則は一般に

$$\dfrac{A \wedge B \qquad \begin{matrix}[A, B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ \wedge E$$

のように書くことができる。われわれが最初に見た $\wedge$ の除去則は、この C が A や B であるような特殊ケースだと考えればよい。このとき、この一般化された $\wedge$ 除去の規則と、先の $L\wedge$ の対応を見てとるのは容易であろう。

しかし、一般化された除去則はなぜこのような形をとらねばならないのだろうか。それを考えるのに少し寄り道をする。いま、一般化された $\wedge$ 除去則において、前提になっている $A \wedge B$ がそれ自身、$\wedge$ の導入則によって導かれたとしてみよう。そのとき、次のような導出が成立する。

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ B\end{matrix}}{A \wedge B}\ \wedge I \qquad \begin{matrix}[A, B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ \wedge E$$

この導出をよく見ればわかることだが、この導出は余分な回り道を含んでいる。A そのものの導出があり、B そのものの導出があるならば、そして A, B から C への導出があるならば、われわれはこれらの導出を組み合わせるだけで C の導出を構成できるはずである。すなわち、上の導出は、

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ A & B \end{array} \\ \vdots \\ C \end{array}$$

へと変換 convert できる。ここで生じている事態は次のようなものである。もし、除去則の適用において、その主前提 ($\wedge$ 除去の場合 $A \wedge B$) が、その導入則によって導かれているならば、その導出は、当の導入則も除去則も含まない導出へと変換できる。この事態は、通常、次のような原理としてまとめられる。

> **Inversion principle**　ある命題を導出するための直接の根拠から導けるものは、その命題から導ける。

これを $\wedge$ の規則に当てはめてみれば、こうなる。ある命題、例えば $A \wedge B$ を導出するための直接の根拠は $\wedge$-導入則の前提、つまり A, B なのであるから、A, B から C が導けたとすれば、$A \wedge B$ からも C は導ける。これはまさに、上の一般的な $\wedge$-導入則が述べていることである。

次に、$L \to$ を考えてみよう。$A \to B$ を導出するための直接の根拠は、A という仮定から B が導出できる、ということである。もし C がそうした仮定的導出から導けるとすれば、その事実は、次のように言い換えることができる。

> もし C が B から帰結するならば、C は A からすでに導けたはずである。（なぜなら B は A から導けるのだから。）

このアイデアに基づいて一般的な除去則を次のように定式化できる。

$$\dfrac{A \to B \quad A \quad \begin{array}{c}[B] \\ \vdots \\ C\end{array}}{C} \to E$$

そしてこの規則に関しても、もし前提の $A \to B$ が直接の根拠によって導かれているならば、その導出から導入則も除去則も取り除いてしまうことができる。すなわち、

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[A] \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \to B} \to I \quad \begin{array}{c}\vdots \\ A\end{array} \quad \begin{array}{c}[B] \\ \vdots \\ C\end{array}}{C} \to E$$

は、

$$\begin{array}{c}\vdots\\ A\\ \vdots\\ B\\ \vdots\\ C\end{array}$$

へと変換できるのである。

こうして、自然演繹の除去則を一般化された形に変形した上でならば、先の $L\wedge$ や $L\rightarrow$ 規則は、自然演繹の規則をメタ的に定式化し直した規則になっている、ということが充分見てとれるであろう。

G1 システムの定式化

以上の準備に基づいて **G1** と呼ばれるシステム（ゲンツェンの元来の体系）を見ておこう。ただし、しばらくの間、余計な手間を省くために量化子の規則は除いておくことにする。

公理

Ax　$A \Rightarrow A$

構造規則 (structural rule)

LW $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$　　RW $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$

LC $\dfrac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$　　RC $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$

LEx $\dfrac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, B, A, \Delta \Rightarrow \Lambda}$　　REx $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Lambda}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, A, \Lambda}$

Cut $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Lambda \Rightarrow \Theta}{\Gamma, \Lambda \Rightarrow \Delta, \Theta}$

論理規則

R$\wedge$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$　　L$\wedge$ $\dfrac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

R$\rightarrow$ $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$　　L$\rightarrow$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma, \Rightarrow \Delta}$

R$\vee$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$　　L$\vee$ $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

$$\text{R}\neg\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A} \qquad \text{L}\neg\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

このシステムは、ゲンツェンの LK と呼ばれる古典論理のシステムである[9]。先に見た規則とは随分違っているように思われるかもしれない。それらの違いには一々理由があるので、それを丁寧に見てゆこう。

(1)　まず、公理である。自然演繹の体系には公理はなかった。しかし、この G-システムは、自然演繹での導出をメタ的に記述する体系だということを思い出してもらいたい。公理 $A \Rightarrow A$ は、自然演繹において単に A と仮定する、その手続きに対応している。自然演繹において A を仮定することは、すでに A から A 自身が帰結することを含意していた。したがって、それをメタ的に記述すれば、このような公理が得られる。

(2)　次に、構造規則である。このようなものも自然演繹にはなかった。なぜ構造規則が必要なのかを見るために、同時に、G-システムで導出をどのように行うかを見るために、一つの実例を考えてみよう。いま、

$(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$ を示せ。

という問題が与えられたとしよう。われわれがなすべきことは、

$$\Rightarrow (A \to (A \to B)) \to (A \to B)$$

という sequent を作り出すことである。それは次のように行われる。

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow A \quad \cfrac{A \Rightarrow A \quad B, A \Rightarrow B}{A \to B, A \Rightarrow B}\ L\to}{A \to (A \to B), A \Rightarrow B}\ L\to}{A \to (A \to B) \Rightarrow A \to B}\ R\to}{\Rightarrow (A \to (A \to B)) \to (A \to B)}\ R\to$$

しかしこれは、上の体系の導出にはなっていない。というのも、一番上の sequent が $A \Rightarrow A$ という形の公理にはなっていないからである。これを公理の形にするには、さらにもう一行付け加えて、

$$\frac{B \Rightarrow B}{B, A \Rightarrow B}\ LW$$

のようにしてやる必要がある。この実例を見る限り、LW 規則、正式には左の weakning(Thinning と言われることもある）が必要になりそうだということはわかる。実は、この規則は、vacuous discharge に対応している（5 ページ参照)。それには、次の導出を見てみればよい。

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow A}{A, B \Rightarrow A}\ LW}{A \Rightarrow B \to A}\ R\to}{\Rightarrow A \to (B \to A)}\ R\to$$

[9]ただし、マイナーな相違はある。

(3)　ここで最初に提示した G の規則とこの **G1** システムでの規則とが微妙に違っている理由を説明する。これは **G1** の重要な特徴なのだが、**G1** における直観主義論理の体系は「$\Rightarrow$ の右辺には高々一つの式が現れてよい」という制約を上の **G1** システムに課すことによって得られる。だから、上の **G1** と呼ばれているシステムは実際には古典論理の体系なのである。以下では、古典論理の **G1** システムを **G1c**、直観主義論理の **G1** システムを **G1i** と表すことにする[10]。したがって、自然演繹の規則をメタ的に見て翻訳した $R\wedge$ は、

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \wedge B}\ R\wedge$$

であったが、これは実は直観主義論理の規則だったのである。古典論理には「$\Rightarrow$ の右辺には高々式が一つ」というような制約はないから、この規則は、むしろ、

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Theta, A \quad \Delta \Rightarrow \Xi, B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta, \Xi, A \wedge B}$$

と書かれなければならない。けれども、これではあまりに規則が複雑になりすぎてしまうから、ここで文脈（つまり導出に使われた仮定や前提の集まり、すなわち Γ や $Delta$）の共有 shared context という考え方を使う。例えば、規則の上段で A を導くのに使われた仮定 Γ と B を導くのに使われた仮定 Δ とをひとまとめにして、一つの文字（ここでは Γ）で表してしまうことにすれば、規則はもう少しスリムになって、次のようになる。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

(4)　否定に関する二つの規則は、直観的にその意味を把握するのがむずかしいかもしれない。そのためには、一旦、直観主義の体系にもどってみるのがよいかもしれない。**G1i** では、否定に関する規則として、

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \bot}{\Gamma \Rightarrow \varphi}$$

が使われる。これは、Γ から矛盾が導出できるならば、Γ からは何でも導出できるということを意味しているのだから、自然演繹の $\bot$-規則のメタ・バージョンとして理解できるであろう。しかし、これと同じ役割を果たす規則として、次のような規則を考えることもできる。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \varphi}$$

すなわち、$\Rightarrow$ の右辺が空であることによって、矛盾を意味させることができるのである。これは一種の weakening と見ることができる。すると、この考え方から自然な流れとして、次のような否定の規則を考えることができる。

[10] ゲンツェンのオリジナルでは、それぞれ LK,LJ という呼び名が与えられている。

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \neg\varphi}\ R\neg$$

これは、自然演繹の ¬-I に相当することに注意しよう。一方、

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow}\ L\neg$$

これは、自然演繹の ¬-E に相当するメタ規則と解釈できるであろう。

ところで、これらの規則は直観主義論理の規則なのだから、⇒ の右辺には一つ以上の式が現れてはならない、という制限があった。この制限をはずしてやると、古典的な規則がそのままの形で得られる。

けれども、なお釈然としない、という人もいるかもしれない。そういう人は、次のように考えてもよい。$\Gamma \Rightarrow \Delta$ という sequent は、直観的には、「Γ のメンバーがすべて真のとき、Δ のメンバーの少なくとも一つが真である」ということを示していると読むことができる。これは sequent が妥当だと言うことにほかならない。このとき、「Γ のメンバーをすべて真にし、Δ のメンバーのすべてを偽にすることができる」とき、sequent は反証可能 falsifiable であると言うことにする。

さて、このとき、

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}$$

は、この下段の sequent が反証可能であるための必要十分条件をその上段が与えている、と見なすことができる。下段が反証可能だということは、Γ のすべてを真にし、⇒ の右辺をすべて偽にできるということである。特に $\neg A$ を偽にできなくてはならない。しかしそのことは、上段の A が真であることを意味する。逆に上段が反証可能ならば、下段も反証可能でなければならない。こうして、規則を反証可能性の条件として読むならば、これらの規則はいずれも健全な規則と見ることができるのである。(公理は、反証不可能であることに注意せよ。)

ここで **G1c** の量化子に関する規則を提示しておく。∀ に関しては、

$$\frac{\varphi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ L\forall \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\varphi(x)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(a)}\ R\forall$$

の二つが規則である。ただし、L∀ 規則の t は任意のタームである。また、変項条件として、R∀ において、a が Γ, Δ に現れてはならないという点に注意することが重要である。a は、この場合固有変項 eigenvaliable と呼ばれる。

$$\frac{\varphi(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x\varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\ L\exists \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\varphi(x)}\ R\exists$$

L∃において、a は Γ, Δ には現れてはならない（この場合も a は eigenvariable と呼ばれる）。また、R∃ においては、t は任意のタームである。

G1c での証明の例を見ておこう。次は、排中律の証明図である。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\Rightarrow A, \neg A}\,L\neg}{\Rightarrow A, A \vee \neg A}\,R\vee}{\Rightarrow A \vee \neg A, A}\,REx}{\Rightarrow A \vee \neg A, A \vee \neg A}\,R\vee}{\Rightarrow A \vee \neg A}\,RC$$

次も、**G1c** での証明の例である。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{F(a) \Rightarrow F(a)}{F(a) \Rightarrow \exists x F(x)}\,R\exists}{\Rightarrow \exists x F(x), \neg F(a)}\,R\neg}{\Rightarrow \exists x F(x), \forall y \neg G(y)}\,R\forall}{\neg \forall y \neg F(y) \Rightarrow \exists x F(x)}\,L\neg}{\Rightarrow \neg \forall y \neg F(y) \to \exists x F(x)}\,R\to$$

問題 1　次の証明のどこに誤りがあるかを指摘せよ。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{F(a) \Rightarrow F(a)}{F(a), G(a) \Rightarrow F(a)}\,LW \qquad \dfrac{G(a) \Rightarrow G(a)}{F(a), G(a) \Rightarrow G(a)}\,LW}{F(a), G(a) \Rightarrow F(a) \wedge G(a)}\,R\wedge}{F(a), G(a) \Rightarrow \exists x(F(x) \wedge G(x))}\,R\exists}{F(a), \exists x G(x) \Rightarrow \exists x(F(x) \wedge G(x))}\,L\exists}{\exists x F(x), \exists x G(x) \Rightarrow \exists x(F(x) \wedge G(x))}\,L\exists}{\exists x F(x) \wedge \exists x G(x) \Rightarrow \exists x(F(x) \wedge G(x))}\,L\wedge}{\Rightarrow \exists x F(x) \wedge \exists x G(x) \to \exists x(F(x) \wedge G(x))}\,R\to$$

問題 2　以下を証明しなさい。

(1)　$A \vee B \to \neg(\neg A \wedge \neg B)$

(2)　$\neg(\neg A \wedge \neg B) \to A \vee B$

(3)　$(A \to B) \to \neg A \vee B$

(4)　$\neg(A \wedge B) \to \neg A \vee \neg B$

(5)　$(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$

(6)　$(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

(7)　$\exists x F(x) \to \neg \forall y \neg F(y)$

(8)　$\neg \forall y F(y) \to \exists x \neg F(x)$

(9)　$\exists x(A \to B(x)) \to (A \to \exists x B(x))$

(10)　$(A \to \exists x B(x)) \to \exists x(A \to B(x))$

(11)　$\exists x(A(x) \to B(x)) \to (\forall x A(x) \to \exists x B(x))$

さて、直観主義論理の体系 **G1i** は、**G1c** における sequent $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の Δ を高々一つに制限してできる体系である。例えば、以下は **G1i** における証明の一例である。

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow A}{A \land \neg A \Rightarrow A}\ L\land}{\neg A, A \land \neg A \Rightarrow}\ L\neg}{A \land \neg A, A \land \neg A \Rightarrow}\ L\land}{A \land \neg A \Rightarrow}\ LC}{\Rightarrow \neg(A \land \neg A)}\ R\neg$$

問題　以下を、**G1i** において証明しなさい。

(1)　$\neg A \lor B \Rightarrow A \to B$
(2)　$A \land B \to A$
(3)　$A \to A \lor B$
(4)　$\neg A \lor \neg B \to \neg(A \land B)$
(5)　$\neg(A \lor B) \to \neg A \land \neg B$
(6)　$\neg A \land \neg B \to \neg(A \lor B)$
(7)　$(A \lor C) \land (B \lor C) \Rightarrow (A \land B) \lor C$
(8)　$A \to \neg B \Rightarrow B \to \neg A$
(9)　$\exists x F(x) \to \neg \forall y \neg F(y)$
(10)　$\exists x \neg F(x) \to \neg \forall x F(x)$
(11)　$\forall x(F(x) \land G(x)) \to \forall x F(x) \land \forall x G(x)$
(12)　$\neg\neg(A \to B), A \Rightarrow \neg\neg B$
(13)　$\neg\neg B \to B, \neg\neg(A \to B) \Rightarrow A \to B$
(14)　$\neg\neg\neg A \to \neg A$
(15)　$A \to \neg\neg\neg A$

G3ip(直観主義命題論理の G3 システム)

ここで細かい説明は抜きで、G3 と呼ばれる体系の直観主義システムを提示する。

論理的公理

$$P, \Gamma \Rightarrow P \qquad \text{(ただし、}P\text{ は原子式とする。)}$$

論理的規則

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow C}{A \land B, \Gamma \Rightarrow C}\ L\land \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \land B}\ R\land$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow C \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \lor B, \Gamma \Rightarrow C}\ L\lor \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \lor B}\ R\lor_1 \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \lor B}\ R\lor_2$$

$$\frac{A \to B, \Gamma \Rightarrow A \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \to B, \Gamma \Rightarrow C}\ L\to \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B}\ R\to$$

$$\frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow C}\ L\bot$$

このシステムの基本的な考え方は、結論からの逆算によって証明を発見する方法（the root first proof search という）がうまく適用できるようにする、という点にある。そのために、**G1** の規則にいくつかの工夫が凝らされている。

(1)　第一に、weakning の規則を使わずにすむように、公理の形が $A \Rightarrow A$ ではなく、$P, \Gamma \Rightarrow P$ の形になっている。ただし、この形の公理では、P として原子式のみを許容するようになっている。

(2)　これらの規則で、仮定からなる Γ は、単なる仮定式の集合ではなく、multiset と呼ばれるものになっている。すなわち、Γ は、反復を許容するが、順序は無関係である。したがって、$\{A, B, C\}$ と $\{A, C, B\}$ は同じ multiset であるが、$\{A, B, C\}$ と $\{A, A, B, C\}$ とは異なる。Γ をこのように扱うことによって、構造規則の一部を省略できる。

(3)　最初に自然演繹からの移行の脈絡で考えた $R\wedge$ 規則は、

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \wedge B}$$

であった。しかしこの形の規則だと、下段から証明を構成する場合、複数の仮定を上段でどのように配分するかが一意に決まらない。そこで、上の規則の Γ と Δ をひとまとめにして、左右の導出に同じ仮定を配分するようにすることができる。その結果、$R\wedge$ は、

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

のようになる。このような規則の定式化を Shared context に基づく定式化と言う。

具体的な導出を見てみよう。

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A, B \Rightarrow A \quad A, B \Rightarrow B}{A, B \Rightarrow A \wedge B}\ R\wedge}{A \Rightarrow B \to A \wedge B}\ R\to}{\Rightarrow A \to (B \to A \wedge B)}\ R\to$$

問題 5

(1)　$\vdash (A \wedge B) \to (B \wedge A)$

(2)　$\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \wedge B) \to C)$

(3) $\vdash A \to \neg\neg A$
(4) $\vdash (A \wedge B) \vee C \to (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
(5) $\vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee C$

上の問題 5 は、自然演繹の問題と同じである。これらを **G3ip** での証明に書き換えるのは容易である。ただし、否定の扱いには注意が必要である。直観主義論理では、$\neg A$ は $A \to\perp$ と解釈される。したがって、上の (3) を証明するには、

$$\Rightarrow A \to ((A \to\perp) \to\perp)$$

を証明すればよい。それは次のようになる。

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \to\perp, A \Rightarrow A \quad \cfrac{}{\perp, A \Rightarrow\perp}\ L\perp}{A \to\perp, A \Rightarrow\perp}\ L\to}{A \Rightarrow (A \to\perp) \to\perp}\ R\to}{\Rightarrow A \to ((A \to\perp) \to\perp)}\ R\to$$

問題 6

(1) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
(2) $(A \vee B \to C) \to ((A \to C) \wedge (B \to C))$
(3) $(\neg\neg A \to \neg\neg B) \to \neg\neg(A \to B)$
(4) $\neg\neg(P \vee \neg P)$
(5) $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$

Cut 規則の admissibility

G3ip には Cut 規則、

$$\frac{\Gamma \Rightarrow D \quad D, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, \Delta \Rightarrow C}\ Cut$$

がない。このようなシステムを Cut-free system という。**G3ip** が cut-free であるという事実を使って、この体系がもつ様々な性質を示すことができる。しかしながら、その前に、この **G3ip** が、本当に cut なしで充分なのか、cut なしで証明できることに過不足はないのか、を検討しておく必要がある。答えは、cut なしで充分である。これを示すのに、**G3ip** において cut 規則が admissible（許容可能）であることを示そう。すなわち、**G3ip**+cut の体系で証明できることは、すべて **G3ip** だけで証明できることを示そう。（これは、cut 規則の付け加えが **G3ip** の保存拡大 conservative extension になっている、ということである。）

しかし cut 規則の admissibility を示すのはそれほど簡単ではない。若干の準備が必要である。まず、式の重さ weight という概念を定義する。

定義 1　式 A の重さ $w(A)$ は次のようにして帰納的に定義される。

1. $w(\perp) = 0$
2. P が原子式のとき、$w(P) = 1$
3. $w(A \circ B) = w(A) + w(B) + 1$ ただし、$\circ$ は $\wedge, \vee, \rightarrow$ のいずれかとする。

例えば、$w(\neg A) = w(A \rightarrow \perp) = w(A) + w(\perp) + 1 = w(A) + 1$ である。

定義 2　導出の高さ height は、推論規則の適用の最大数である。ただし、公理と $L\perp$ は高さ 0 であるとする。

補題 1　任意の式 C および任意の contextΓ に関して、sequent $C, \Gamma \Rightarrow C$ は導出可能である。

[証明]　C の重さについての帰納法によって証明する。もし $w(C) \leqslant 1$ ならば、$C = \perp$ か、または、ある原子式 P に関して $C = P$ であるか、あるいは $C = \perp \rightarrow \perp$ である[11]。最初のケースでは、$C, \Gamma \Rightarrow C$ は、$L\perp$ の代入事例である。二番目の $C = P$ の場合は、それ自体が公理になる。最後の $C = \perp \rightarrow \perp$ の場合は、

$$\cfrac{\cfrac{}{\perp, \perp \rightarrow \perp, \Gamma \Rightarrow \perp}\,L\perp}{\perp \rightarrow \perp, \Gamma \Rightarrow \perp \rightarrow \perp}\,R\rightarrow$$

によって導出できる。さて、$w(C) \leqslant n$ であるような任意の C に関しては、$C, \Gamma \Rightarrow C$ が導出可能だとして、この仮定に基づいて、次に、$w(D) \leqslant n + 1$ であるような D に関して $D, \Gamma \Rightarrow D$ が導出可能であることを示そう。これは三つのケースに分けることができる。

$D = A \wedge B$ のケース。重さの定義により、$w(A) \leqslant n$ かつ $w(B) \leqslant n$ である。このとき、$A \wedge B, \Gamma \Rightarrow A \wedge B$ は、次のようにして導出可能である。

$$\cfrac{\cfrac{A, B, \Gamma \Rightarrow A}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow A}\,L\wedge \quad \cfrac{A, B, \Gamma \Rightarrow B}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow B}\,L\wedge}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow A \wedge B}\,R\wedge$$

この導出の一番上にある、$A, B, \Gamma \Rightarrow A$ と $A, B, \Gamma \Rightarrow B$ は、それぞれ $B, \Gamma = \Gamma'$ および $A, \Gamma = \Gamma''$ とおけば、$A, \Gamma' \Rightarrow A$ および $B, \Gamma'' \Rightarrow B$ となり、context は任意でよかったのだから、これらが導出可能であることは、仮定より保証されている。

[11] ここで $\perp \vee \perp$ や $\perp \wedge \perp$ のケースは、無視している。やってみれば、簡単にできる。

$D = A \vee B$ のケース。同様に $w(A) \leqslant n$ かつ $w(B) \leqslant n$ であるから、次のように導出できる。

$$\dfrac{\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow A}{A, \Gamma \Rightarrow A \vee B}\ R\vee_1 \quad \dfrac{B, \Gamma \Rightarrow B}{B, \Gamma \Rightarrow A \vee B}\ R\vee_2}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow A \vee B}\ L\vee$$

$D = A \to B$ のケースは次のようになる。

$$\dfrac{\dfrac{A, A \to B, \Gamma \Rightarrow A \quad B, A, \Gamma \Rightarrow B}{A, A \to B, \Gamma \Rightarrow B}\ L \to}{A \to B, \Gamma \Rightarrow A \to B}\ R \to$$

ここで、一番上にある二つの sequent は、帰納法の仮定により導出可能である。QED.

以下では、

$$\vdash_n \Gamma \Rightarrow C$$

によって、sequent $\Gamma \Rightarrow C$ が **G3ip** において高々n の高さの導出をもつ、ということを表すことにする。このとき、次の定理が成立する。

定理 4：Height-preserving weakening　もし$\vdash_n \Gamma \Rightarrow C$ ならば、任意の D について、$\vdash_n D, \Gamma \Rightarrow C$。

[証明]　導出の高さについての帰納法による。

Base case: すなわち、高さ $n = 0$ のケース。この場合は、$\Gamma \Rightarrow C$ は、公理か $L\perp$ の結論かのいずれかであり、しかも C は原子式で、Γ 中に含まれる式であるか、$\perp$ が Γ 中に含まれているかでなければならない。しかしこれらのいずれの場合も、$D, \Gamma \Rightarrow C$ は、再び公理であるか、$L\perp$ の結論になる。

Induction base: 高さが $\leqslant n$ までの height-preserving weakening が許容可能である、すなわち、n までのところでは、上の定理が成り立っていると仮定する。

Induction step: いま、使われた最後の規則が $L\wedge$ であり、$\Gamma = A \wedge B, \Gamma'$ であるとする。このとき、最後のステップは、

$$\dfrac{A, B, \Gamma' \Rightarrow C}{A \wedge B, \Gamma' \Rightarrow C}\ L\wedge$$

となり、前提の $A, B, \Gamma' \Rightarrow C$ は、n 以下の高さで導出可能である。したがって、帰納法の仮定により $D, A, B, \Gamma' \Rightarrow C$ は、n までのステップで導出可能であるから、これに $L\wedge$ を適用すれば、$n+1$ 以下で $D, A \wedge B, \Gamma' \Rightarrow C$ が導出できる。

同じような議論が他のすべての規則についても適用できる。　QED.

補題 5: Inversion lemma

(i)　もし $\vdash_n A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C$ ならば、$\vdash_n A, B, \Gamma \Rightarrow C$,

(ii)　もし $\vdash_n A \vee B, \Gamma \Rightarrow C$ ならば、$\vdash_n A, \Gamma \Rightarrow C$ かつ $\vdash_n B, \Gamma \Rightarrow C$,

(iii)　もし $\vdash_n A \to B, \Gamma \Rightarrow C$ ならば、$\vdash_n B, \Gamma \Rightarrow C$.

[証明]　n についての帰納法による。

(i)　もし $A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C$ が公理であるか、$L\bot$ の結論であるならば、$A \wedge B$ そのものは原子式でもないし、$\bot$ でもないのだから、$A \wedge B$ は context の一部でなくてはならない。例えば、$A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C$ が公理の場合には、原子式 C に関して $C, A \wedge B, \Gamma' \Rightarrow C$ のようになっていなくてはならない。そして、$A \wedge B, \Gamma'$ がこの場合の context になっているはずである。しかし、その場合には、$A, B, \Gamma \Rightarrow C$ もまた公理であることは明らかである。($L\bot$ の結論の場合も同様。)

次に、n までは (i) が成立していると仮定する。その上で、$\vdash_{n+1} A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C$ が成り立つとしよう。

もし $A \wedge B$ が主式であるならば（つまり、$A \wedge B$ が $L\wedge$ によって導かれているならば)、$A, B, \Gamma \Rightarrow C$ は高さ n までに導出されていることになる。一方、もし $A \wedge B$ が、最後に適用された規則の主式ではないならば、その最後に適用された規則は、$A \wedge B, \Gamma' \Rightarrow C'$ と $A \wedge B, \Gamma'' \Rightarrow C''$ の一方、または両方を前提としてもつはずである。これらの導出は n 以下であるはずだから、帰納法の仮定により $\vdash_n A, B, \Gamma' \Rightarrow C'$ および $\vdash_n A, B.\Gamma'' \Rightarrow C''$ が成立しているはずである。これらに、最後に使った規則を適用しよう。その結果は、$A, B, \Gamma \Rightarrow C$ であり、これは高々$n+1$ までのステップで導出できる。

(ii)　(i) のケースと同様に、もし $A \vee B, \Gamma \Rightarrow C$ が公理ならば、$A, \Gamma \Rightarrow C$ も $B, \Gamma \Rightarrow C$ もいずれも公理である。

もし $A \vee B$ が $L\vee$ 規則の主式であるならば、$A, \Gamma \Rightarrow C$ と $B, \Gamma \Rightarrow C$ のいずれも n 番目のステップまでに導出できる。

もし $A \vee B$ が、最後に使われる規則の主式ではないならば、その規則は $A \vee B, \Gamma' \Rightarrow C'$ と $A \vee B, \Gamma'' \Rightarrow C''$ の一方、または両方を前提としてもち、その高さは n 以下のはずである。したがって、帰納法の仮定により (1)$\vdash_n A, \Gamma' \Rightarrow C'$ かつ (2)$\vdash_n B, \Gamma' \Rightarrow C'$ であり、また、(3)$\vdash_n A, \Gamma'' \Rightarrow C''$ かつ (4)$\vdash_n B, \Gamma'' \Rightarrow C''$ であるはずである。このとき、(1) と (3) とに最後の規則を適用すれば、$A, \Gamma \Rightarrow C$ が得られ、(2) と (4) に最後の規則を適用すれば、$B, \Gamma \Rightarrow C$ が得られるが、これらは高々$n+1$ までのステップで導出できる。

(iii)　$A \to B, \Gamma \Rightarrow C$ が公理の場合は、前と同様である。

もし $A \to B$ が $L\to$ の主式ならば、その規則の前提である $B, \Gamma \Rightarrow C$ は n の導出である。

もし $A \to B$ が最後に適用された規則の主式ではないならば、その規則は、$A \to B, \Gamma' \Rightarrow C'$ および $A \to B, \Gamma'' \Rightarrow C''$ の一方、ないし両方を前提としてもち、その高さは n 以下のはずである。それゆえ、帰納法の仮定により、

$\vdash_n B, \Gamma' \Rightarrow C'$ および $\vdash_n B, \Gamma'' \Rightarrow C''$ が成立する。最後に使われた規則をこれらに適用すれば、$B, \Gamma \Rightarrow C$ が得られて、その高さは高々$n+1$ である。
QED.

$L \rightarrow$ 規則は、

$$\frac{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow A \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow C} \; L \rightarrow$$

であった。この規則の左側の前提に関しては inversion が成り立たないことに注意しよう。すなわち、

(*)　もし $\vdash_n A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow C$ ならば、$\vdash_n A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow A$

は成り立たないのである。それはなぜか。それを考えるために、Inversion lemma の意味するところが何かを少し丁寧に考えてみたい。例えば、

(i)　もし $\vdash_n A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C$ ならば、$\vdash_n A, B, \Gamma \Rightarrow C$

は、$A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C$ の導出があるならば、その導出で使われた規則のみを使って (あるいはそれ以下の資源を使って）$A, B, \Gamma \Rightarrow C$ を導出できる、ということを意味している。というのも、もし前者の導出で使われる以外の規則が使われるならば、n 以下のステップで後者が導出できる保証は無くなってしまうからである。したがって、上の (*) が成立するならば、結論 $A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow C$ が導出できるならば、端的に $A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow A$ が導出できる、ということを意味する。

ところで、$\bot \rightarrow \bot \Rightarrow \bot \rightarrow \bot$ は導出できるから、もし (*) が成り立つならば、$\bot \rightarrow \bot \Rightarrow \bot$ が導出できることになってしまう。しかし、この場合、$\bot \Rightarrow \bot$ は、$L\bot$ の実例だから、$R \rightarrow$ の適用によって、$\Rightarrow \bot \rightarrow \bot$ が得られる。これと $\bot \rightarrow \bot \Rightarrow \bot$ を組み合わせて cut 規則を使えば[12]、$\Rightarrow \bot$ が導出できる。しかし、これは **G3ip** が矛盾 inconsistent であることを意味する。実際には、$\bot \rightarrow \bot \Rightarrow \bot \rightarrow \bot$ の導出は次のようになされる。

$$\dfrac{\dfrac{}{\bot, \bot \rightarrow \bot \Rightarrow \bot} \; L\bot}{\bot \rightarrow \bot \Rightarrow \bot \rightarrow \bot} \; R \rightarrow$$

Contraction 規則と Cut 規則の許容可能性

ようやく Cut 規則の許容可能性を示す準備が整ったが、最初に contraction 規則の許容可能性を示す。

定理 6：Height-preserving contraction　もし $\vdash_n D, D, \Gamma \Rightarrow C$ ならば、$\vdash_n D, \Gamma \Rightarrow C$。

[12] 後で示すように cut 規則は許容可能だから、使っても問題ない。

[証明]　導出の高さについての帰納法による。もし $n = 0$ ならば、$D, D, \Gamma \Rightarrow C$ は、公理であるか、$L\perp$ の結論である。そして C は、前件において、原子式であるか、前件が $\perp$ を含んでいるか、のいずれかでなくてはならない。いずれの場合にも、$D, \Gamma \Rightarrow C$ は、公理であるか、$L\perp$ の結論である。

次に、高さ n までの contraction が許容可能であると仮定する。contraction formula が最後の推論において主式であるか否かに応じて、二つの場合が考えられる。

(1)　contraction formula D が、contraction の前提を導出する推論の主式でない場合、その推論は（前提が一つの規則の場合は）次のような形になる。

$$\frac{D, D, \Gamma' \Rightarrow C'}{D, D, \Gamma \Rightarrow C}$$

この導出の高さは n 以下であるから、帰納法の仮定により、$\vdash_n D, \Gamma' \Rightarrow C'$ が得られる。これに、最後の規則を適用すれば、$\vdash_{n+1} D, \Gamma \Rightarrow C$ が得られる。前提が二つの規則の場合も、同様である。

(2)　D が主式の場合は、D の形に応じて三つのケースに分けることができる。

$D = A \wedge B$ の場合。最後のステップは、$L\wedge$ 規則の適用であり、$\vdash_n A, B, A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C$ となっているはずである。補題 5 により、$\vdash_n A, B, A, B, A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C$ が得られるから、帰納法の仮定を二回適用することによって、$\vdash_n A, B, \Gamma \Rightarrow C$ が得られる。これに、$L\wedge$ を適用すれば、$\vdash_{n+1} A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C$ が得られる。

$D = A \vee B$ の場合。これも $\wedge$ の場合とまったく同様である。

$D = A \to B$ の場合。最後のステップは $L \to$ であり、二つの前提はそれぞれ $\vdash_n A \to B, A \to B, \Gamma \Rightarrow A$ および $\vdash_n B, A \vee B, \Gamma \Rightarrow C$ となるはずである。帰納法の仮定により、最初の sequent から、$\vdash_n A \to B, \Gamma \Rightarrow A$ が得られる。一方、補題 5 により、第二の sequent から、$\vdash_n B, B, \Gamma \Rightarrow C$ が得られ、帰納法の仮定により、$\vdash_n B, \Gamma \Rightarrow C$ が得られる。これら二つに $L \to$ を適用すれば、$\vdash_{n+1} A \to B, \Gamma \Rightarrow C$ が得られる。QED.

問題　上の証明において、$D = A \vee B$ の場合を補完せよ。

次に cut 規則の許容可能性の証明に向かう。証明の大まかな方針はこうである。いま、導出の出発点である公理や $L\perp$ の方から、結論に向かって導出を眺めることにする。このとき、導出の先の方で cut が使われているならば、その cut の使用を出発点の方に変換ないし移動させることができる。その結果、最終的に cut の使用は、その二つの前提が公理や $L\perp$ であるような形に変換できる。一方、公理や $L\perp$ を前提とする cut の適用は、その結論がふたたび公理や $L\perp$ になる、ということを示すことができる、もう少し具体的に言えば、cut の左の前提が $\perp, \Gamma \Rightarrow C$ であるならば、結論の前件には $\perp$ が含まれる、ということを示すことができる。さらに、左の前提が $P, \Gamma \Rightarrow P$ の形になっているならば、右の前提が $P, \Delta \Rightarrow C$ の形になっている、というこ

とを示すことができる。この右前提 $P, \Delta \Rightarrow C$ が公理であるのは、$C = P$ であるか、C が Δ に含まれている場合である。この右前提が $L\perp$ の結論であるのは、$\perp$ が Δ に含まれている場合である。いずれの場合も、cut の結論、すなわち $P, \Gamma, \Delta \Rightarrow C$ が公理もしくは $L\perp$ の結論であることが示される。

以上のことは、cut formula の重さについての帰納法と、二つの前提の導出の高さの和についての部分帰納法とによって示される。

定義 7: Cut-Height ある導出における cut 規則の適用例の cut-height とは、その cut の適用における二つの前提の高さの和である。

定理 8 cut 規則

$$\frac{\Gamma \Rightarrow D \quad D, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, \Delta \Rightarrow C}\ Cut$$

は **G3ip** において許容可能である。

証明 以下の証明は、四つのケースに分けられる。

(1) cut 規則の前提の少なくとも一方が公理ないし $L\perp$ の結論である場合。

(2) cut 規則の二つの前提のいずれにおいても cut formula が主式ではない場合。

(3) cut 規則のちょうど一方だけにおいて cut formula が主式である場合。

(4) cut 規則の両方の前提において cut formula が主式である場合。

cut 規則が前提として公理ないし $L\perp$ の結論をもつ場合 この場合はさらに二つのケースに分類される。

1 左前提 $\Gamma \Rightarrow D$ が公理ないし $L\perp$ の結論である場合。このケースはさらに二つのケースに分かれる。

1.1 cut formula D が Γ 内にある場合。この場合、cut の結論である $\Gamma, \Delta \Rightarrow C$ は、右前提の $D, \Delta \Rightarrow C$ から、weakening によって導ける。したがって、この場合、cut は必要ないことがわかる。

1.2 $\perp$ が Γ にある場合。この場合、$\Gamma, \Delta \Rightarrow C$ は、$L\perp$ の結論になっている。

2 右前提 $D, \Delta \Rightarrow C$ が公理か $L\perp$ の結論である場合。2.1 C が Δ に含まれる場合。このときは、$\Gamma, \Delta \Rightarrow C$ 自体が公理である。

2.2 $C = D$ のとき。このときは、左前提は $\Gamma \Rightarrow C$ であり、これに weakening を適用すれば、cut の結論 $\Gamma, \Delta \Rightarrow C$ が (cut なしで) 得られる。

2.3 $\perp$ が Δ に含まれる場合。この場合は、$\Gamma, \Delta \Rightarrow C$ 自体が $L\perp$ の結論になっている。

2.4 $D = \perp$ のとき、すなわち、cut 規則の適用が

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \perp \quad \perp, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, \Delta \Rightarrow C}\ Cut$$

のようになっているとき、もし $\Gamma \Rightarrow \perp$ が公理ならば、これは 1 のケースに帰着する。（いま右前提が公理ないし $L\perp$ の結論であることは仮定されているのだから）あとは、$\Gamma \Rightarrow \perp$ が左規則によって導かれているケースである[13]。この場合は、使われている左規則の種類によってさらに三つのサブケースに分けられる。これらの規則の適用はいずれも cut-height の小さい導出へと変換されるが、それは、以下で見る他のケースの特殊事例だから、ここでは扱わない。以下の 3.1–3.3 を参照せよ。

どちらの前提も公理ではない cut 規則の場合　この場合はさらに三つのケースに分類される。

3　cut formula D が左前提において主式ではないケース、すなわち、D が右規則 (R-規則）によって導出されていないケース。（以下の導出において一番上の sequent は、左から右へ順に、$n, m, k, \ldots$ の高さの導出をもつ、と仮定する。

3.1　$L\wedge$ のケース。この場合 $\Gamma = A \wedge B, \Gamma'$ とする。cut-height $n+1+m$ の cut 規則をもつ導出

$$\dfrac{\dfrac{A, B, \Gamma' \Rightarrow D}{A \wedge B, \Gamma' \Rightarrow D}\,L\wedge \quad D, \Delta \Rightarrow C}{A \wedge B, \Gamma', \Delta \Rightarrow C}\,Cut$$

は、$L\wedge$ を使ってから Cut を使う代わりに、順序を逆にして $Cut, L\wedge$ の順に換えることによって次のように変形できる。

$$\dfrac{\dfrac{A, B, \Gamma' \Rightarrow D \quad D, \Delta \Rightarrow C}{A, B, \Gamma', \Delta \Rightarrow C}\,Cut}{A \wedge B, \Gamma', \Delta \Rightarrow C}\,L\wedge$$

その結果、cut-height は $n+m$ になる。

3.2　$L\vee$ のケース。$\Gamma = A \vee B, \Gamma'$ とする。cut-height $max(n, m)+1+k$ をもつ導出

$$\dfrac{\dfrac{A, \Gamma' \Rightarrow D \quad B, \Gamma' \Rightarrow D}{A \wedge B, \Gamma' \Rightarrow D}\,L\vee \quad D, \Delta \Rightarrow C}{A \vee B, \Gamma', \Delta \Rightarrow C}\,Cut$$

は、高さ $n+k$ と高さ $m+k$ の二つの cut をもつ導出に変形できる。

$$\dfrac{\dfrac{A, \Gamma' \Rightarrow D \quad D, \Delta \Rightarrow C}{A, \Gamma', \Delta \Rightarrow C}\,Cut \quad \dfrac{B, \Gamma' \Rightarrow D \quad D, \Delta \Rightarrow C}{B, \Gamma', \Delta \Rightarrow C}\,Cut}{A \vee B, \Gamma', \Delta \Rightarrow C}\,L\vee$$

[13] 右規則によって導かれているケースはありえないことに注意。というのも、この sequent の右辺は、$\perp$ のみだから。

3.3　$L\rightarrow$ のケース。$\Gamma = A \rightarrow B, \Gamma'$ とする。cut-height $max(n,m)+1+k$ をもつ導出

$$\cfrac{\cfrac{A \rightarrow B, \Gamma' \Rightarrow A \quad B, \Gamma' \Rightarrow D}{A \rightarrow B, \Gamma' \Rightarrow D}\, L\rightarrow \quad D, \Delta \Rightarrow C}{A \rightarrow B, \Gamma', \Delta \Rightarrow C}\, Cut$$

は、高さ $m+k$ の cut をもつ導出へと変換できる。

$$\cfrac{\cfrac{A \rightarrow B, \Gamma' \Rightarrow A}{A \rightarrow B, \Gamma', \Delta \Rightarrow A}\, Wk \quad \cfrac{B, \Gamma' \Rightarrow D \quad D, \Delta \Rightarrow C}{B, \Gamma', \Delta \Rightarrow C}\, Cut}{A \rightarrow B, \Gamma', \Delta \Rightarrow C}\, L\rightarrow$$

以上の各変換において cut-height が減っていることに注意されたい。

4　cut formula D は左側の前提においてのみ主式である場合。以下の各導出は、cut-height がより小さい cut をもつ導出へと変換される。全部で６つのケースがある。

4.1　$L\wedge$ のケース。$\Delta = A \wedge B, \Delta'$ とする。

$$\cfrac{\Gamma \Rightarrow D \quad \cfrac{D, A, B, \Delta' \Rightarrow C}{D, A \wedge B, \Delta' \Rightarrow C}\, L\wedge}{\Gamma, A \wedge B, \Delta' \Rightarrow C}\, Cut$$

は、cut-height $n+m+1$ をもつが、これは $n+m$ の導出

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow D \quad D, A, B, \Delta' \Rightarrow C}{\Gamma, A, B, \Delta' \Rightarrow C}\, Cut}{\Gamma, A \wedge B, \Delta' \Rightarrow C}\, L\wedge$$

へと変換される。

4.2　$L\vee$ のケース。$\Delta = A \vee B, \Delta'$ とする。cut-height $n+max(m,k)+1$ の導出

$$\cfrac{\Gamma \Rightarrow D \quad \cfrac{D, A, \Delta' \Rightarrow C \quad D, B, \Delta' \Rightarrow C}{D, A \vee B, \Delta' \Rightarrow C}\, L\vee}{\Gamma, A \vee B, \Delta' \Rightarrow C}\, Cut$$

は、高さ $n+m$ と $n+k$ の二つの cut をもつ導出

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow D \quad D, A, \Delta' \Rightarrow C}{\Gamma, A, \Delta' \Rightarrow C}\, Cut \quad \cfrac{\Gamma \Rightarrow D \quad D, B, \Delta' \Rightarrow C}{\Gamma, B, \Delta' \Rightarrow C}\, Cut}{\Gamma, A \vee B, \Delta' \Rightarrow C}\, L\vee$$

へと変換されうる。

4.3　$L\rightarrow$ のケース。この場合、cut-height $n+max(m,k)+1$ をもつ導出

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow D \quad \dfrac{D, A \to B, \Delta' \Rightarrow A \quad D, B, \Delta' \Rightarrow C}{D, A \to B, \Delta' \Rightarrow C} L\to}{\Gamma, A \to B, \Delta' \Rightarrow C} Cut$$

は、高さ $n+m$ と $n+k$ の二つの cut をもつ導出

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow D \quad D, A \to B, \Delta' \Rightarrow A}{\Gamma, A \to B, \Delta' \Rightarrow A} Cut \quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow D \quad D, B, \Delta' \Rightarrow C}{\Gamma, B, \Delta' \Rightarrow C} Cut}{\Gamma, A \to B, \Delta' \Rightarrow C} L\to$$

へと変換される。

4.4　$R\wedge$ のケース。$C = A \wedge B$ とする。このとき、cut-height $n+max(m,k)+1$ の導出

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow D \quad \dfrac{D, \Delta \Rightarrow A \quad D, \Delta \Rightarrow B}{D, \Delta \Rightarrow A \wedge B} R\wedge}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \wedge B} Cut$$

は、高さ $n+m$ と $n+k$ の二つの cut をもつ導出

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow D \quad D, \Delta \Rightarrow A}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A} Cut \quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow D \quad D, \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow B} Cut}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \wedge B} R\wedge$$

へと変換できる。

4.5　$R\vee$ のケース。$C = A \vee B$ とする。それぞれ cut-height $n+m+1$ と $n+k+1$ の cut をもつ導出

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow D \quad \dfrac{D, \Delta \Rightarrow A}{D, \Delta \Rightarrow A \vee B} R\vee_1}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \vee B} Cut \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow D \quad \dfrac{D, \Delta \Rightarrow B}{D, \Delta \Rightarrow A \vee B} R\vee_2}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \vee B} Cut$$

は、それぞれ cut-height $n+m$ と $n+k$ をもつ次の導出に変換される。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow D \quad D, \Delta \Rightarrow A}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A} Cut}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \vee B} R\vee_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow D \quad D, \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow B} Cut}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \vee B} R\vee_2$$

4.6　$R\to$ のケース。$C = A \to B$ とする。このとき、cut-height $n+m+1$ の導出

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow D \quad \dfrac{D, A, \Delta \Rightarrow B}{D, \Delta \Rightarrow A \to B} R\to}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \to B} Cut$$

は、cut-height $n+m$ の cut をもつ次の導出に変換される。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow D \quad D, A, \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow B}\ Cut}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \to B}\ R\to$$

以上の6つのケースにおいて、いずれも cut-height は減っている。

5　cut formula が両方の前提において主式である場合。この場合、三つのサブケースがある。

5.1　$D = A \wedge B$ で、cut-height が $max(n, m) + 1 + k + 1$ の cut をもつ導出が次のようになっている場合、

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}\ R\wedge \qquad \dfrac{A, B, \Delta \Rightarrow C}{A \wedge B, \Delta \Rightarrow C}\ L\wedge}{\Gamma, \Delta \Rightarrow C}\ Cut$$

この導出は、次のようにして height $n + k$ と $m + max(n, k) + 1$ の二つの cut をもつ導出に変形できる。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow B \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad A, B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, B, \Delta \Rightarrow C}\ Cut}{\Gamma, \Gamma, \Delta \Rightarrow C}\ Cut}{\Gamma, \Delta \Rightarrow C}\ Ctr$$

まず、この導出で使われている contraction は、すでに許容可能であることが証明されており、問題ない。注意しなくてはならないのは、この変形は、これまでの変形のように cut-height を減らすようにはなっていない、という点である。この変形では cut-height は増加しうるのである。この変形のポイントは、むしろ、cut-formula の複雑さが減っている、という点にある。この複雑さをどんどん減らして行けば、最後は論理結合子を含まない式になり、その場合、そこでの cut は他のケースに帰着するから、そこで改めて cut-height を減らせばよいのである。

5.2　$D = A \vee B$ で、導出が、cut-height $n + 1 + max(m, k) + 1$ の

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}\ R\vee_1 \qquad \dfrac{A, \Delta \Rightarrow C \quad B, \Delta \Rightarrow C}{A \vee B, \Delta \Rightarrow C}\ L\vee}{\Gamma, \Delta \Rightarrow C}\ Cut$$

か、または同じ cut-height をもつ

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}\ R\vee_2 \qquad \dfrac{A, \Delta \Rightarrow C \quad B, \Delta \Rightarrow C}{A \vee B, \Delta \Rightarrow C}\ L\vee}{\Gamma, \Delta \Rightarrow C}\ Cut$$

のケース。これらの導出は、次のようにして cut-height $n + m$ と $n + k$ の導出に変形できる。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad A, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, \Delta \Rightarrow C}\ Cut \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow B \quad B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, \Delta \Rightarrow C}\ Cut$$

この場合は、cut-height も cut 式の重さもいずれも減っている。

5.3　$D = A \to B$ のケース。高さ $n + 1 + max(m, k) + 1$ の導出

$$\dfrac{\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B}\ R\to \qquad \dfrac{A \to B \Rightarrow A \quad B, \Delta \Rightarrow C}{A \to B, \Delta \Rightarrow C}\ L\to}{\Gamma, \Delta \Rightarrow C}\ Cut$$

は、次のように変形される。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B}\ R\to \quad A \to B, \Delta \Rightarrow A}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A}\ Cut \qquad \dfrac{A, \Gamma \Rightarrow B \quad B, \Delta \Rightarrow C}{A, \Gamma, \Delta \Rightarrow C}\ Cut}{\Gamma, \Delta \Rightarrow C}\ Cut$$

ここで、この導出は三つの cut からなっており、それぞれその高さは $n+1+m$, $n+k$, $max(n+1, m)+1+max(n, k)+1$ である。最初の cut と二つ目の cut では、高さが減っており、二番目と三番目の cut では cut 式の重さが減っている。

以上で、cut 規則の許容可能性が証明された。QED.

cut 規則の除去から何が言えるか

ここで、cut 規則を含めた構造規則が許容可能であること、言い換えると、cut 規則や他の構造規則を用いて証明されたものがそれらなしで証明できること、から何が帰結するか、いくつかの帰結を考えてみよう。

(a)　部分式性質 (subformula property)

定理 9　もし $\Gamma \Rightarrow C$ が **G3ip** で導出をもつならば、その導出に現れるすべての式は、Γ, C の部分式である。

この事実は、**G3ip** の規則をよくチェックしてみればよい。cut 規則を含めた構造規則はなしですますことができるのだから、導出の中でいかなる式も消え去ることはない。よって、定理 9 が成立する。

同様に、導出の中でいったん現れた結合子が消えることはない、という点にも注意しよう。このことから、特に **G3ip** の統語論的な無矛盾性 consistency が帰結する。というのも、$\Rightarrow \perp$ が導出されることはありえないからである。

問題　$\Rightarrow \perp$ が導出されることがありえないのはなぜか。

定理 10　もし **G3ip** で $\Rightarrow A \vee B$ が導出可能ならば、$\Rightarrow A$ か、または $\Rightarrow B$ のいずれかが導出可能である。

[証明]　空虚な左辺をもつ sequent を導出できるのは右規則だけである。それゆえ、最後の規則は、$R\vee$ でしかありえない。QED.

定理 10 で述べられた性質は disjunction property と呼ばれる。

(b)　Underivability results:**G3ip** は、直観主義論理のシステムだから、(古典論理では証明できても) ここでは証明できない sequent がある。例えば、$\Rightarrow A \vee \neg A$ は証明できない。ある式が証明できないことを示すのに、通常はモデル理論を使用するが、ここでは、証明論的にそれを示してみる。

そのための準備として、まず次のことに注意したい。例えば、$\Rightarrow P \vee \neg P$ のように、ある sequent が原子式に関して導出可能でないならば、任意の式に関して、それに対応する sequent $\Rightarrow A \vee \neg A$ もまた導出可能ではない。これは、任意の式に関して $\Rightarrow A$ ならば、当然 $\Rightarrow P$ もなりたつことから明らかである。その上で、次を示す。

定理 11　以下の sequent は **G3ip** では導出可能ではない。

(i)　$\Rightarrow P \vee \neg P$

(ii)　$\Rightarrow \neg P \vee \neg\neg P$

(iii)　$\Rightarrow ((P \to Q) \to P) \to P$

(iv)　$\Rightarrow (P \to Q \vee R) \to ((P \to Q) \vee (P \to R))$

[証明]　(i)：いま $\Rightarrow P \vee \neg P$ の導出が存在すると仮定しよう。disjunction property により、$\Rightarrow P$ か $\Rightarrow \neg P$ か、いずれかの導出がなくてはならない。原子式 P については、いかなる規則からも $\Rightarrow P$ は導出できない。一方、$\Rightarrow \neg P$ を導出できるのは $R \to$ 規則だけである。したがって、inversion によって、$P \Rightarrow \perp$ が導出できなくてはならない。しかし、いかなる規則によってもこれは導出できない。

(ii):$\Rightarrow \neg P \vee \neg\neg P$ が導出できるためには、$\Rightarrow \neg\neg P$ が導出可能でなくてはならない ($\Rightarrow \neg P$ が導出できないことは (i) で示されているから)。その導出を root からたどると次のようになる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \to \perp \Rightarrow P \quad \perp \Rightarrow P}{P \to \perp \Rightarrow P}\, L\to \qquad \dfrac{}{\perp \Rightarrow \perp}\, L\perp}{P \to \perp \Rightarrow \perp}\, L\to}{\Rightarrow (P \to \perp) \to \perp}\, R\to$$

root からの探索ではこれ以外の進み方はないことに注意しよう。左上の $L \to$ 規則の左前提は、その規則の結論と同じ形になっている。したがって、この証明探索は停止しない。よって、$\Rightarrow \neg P \vee \neg\neg P$ の導出は存在しない。

(iii):$\Rightarrow ((P \to Q) \to P) \to P$ は、通常、パースの法則 (Peirce's Law) と呼ばれるものである。この導出の最後の 2 ステップは、

$$\dfrac{\dfrac{(P \to Q) \to P \Rightarrow P \to Q \quad P \Rightarrow P}{(P \to Q) \to P \Rightarrow P}\,L\to}{\Rightarrow ((P \to Q) \to P) \to P}\,R\to$$

でなくてはならない。この一番上の左 sequent をどのように遡るかに関しては、二つの可能性がある。もし $R\to$ によって続けるならば、

$$\dfrac{\dfrac{P, (P \to Q) \to P \Rightarrow P \to Q \quad P, P \Rightarrow Q}{P, (P \to Q) \to P \Rightarrow Q}\,L\to}{(P \to Q) \to P \Rightarrow P \to Q}\,R\to$$

が得られるが、この右側の前提はいかなる規則によっても導出できない。もし代わりに $L\to$ 規則を適用するならば、

$$\dfrac{(P \to Q) \to P \Rightarrow P \to Q \quad \dfrac{P, P \Rightarrow Q}{P \Rightarrow P \to Q}\,R\to}{(P \to Q) \to P \Rightarrow P \to Q}\,L\to$$

を得るが、これもまた同じ理由で失敗に終わる。したがって、$\Rightarrow ((P \to Q) \to P) \to P$ は導出可能ではない。

(iv):最後に $\Rightarrow (P \to Q \lor R) \to ((P \to Q) \lor (P \to R))$ が導出可能でないことを示す。この sequent の最後のステップは $R\to$ しかないので、その前提は $(P \to Q \lor R) \Rightarrow ((P \to Q) \lor (P \to R))$ になる。以下、この前提がどのように導かれたのかを考える。

まず、この sequent の導出における最後の規則が $R\lor_1$ ならば、その導出は

$$\dfrac{(P \to Q \lor R) \Rightarrow (P \to Q)}{(P \to Q \lor R) \Rightarrow ((P \to Q) \lor (P \to R))}\,R\lor_1$$

となる。この前提が $R\to$ と $L\to$ によって導かれるケースをそれぞれ考える。$R\to$ の場合、導出は、

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P, P \to Q \lor R \Rightarrow P \quad \dfrac{P, Q \Rightarrow Q \quad P, R \Rightarrow Q}{P, Q \lor R \Rightarrow Q}\,L\lor}{P, P \to Q \lor R \Rightarrow Q}\,L\to}{P \to Q \lor R \Rightarrow P \to Q}\,R\to}{P \to Q \lor R \Rightarrow (P \to Q) \lor (P \to R)}\,R\lor_1$$

となるが、前提の $P, R \Rightarrow Q$ は導出可能ではない。一方、$R\to$ 規則の代わりに $L\to$ が使われる場合には、導出は

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \to Q \lor R \Rightarrow P \quad Q \lor R \Rightarrow P}{P \to Q \lor R \Rightarrow P}\,L\to \quad Q \lor R \Rightarrow P \to Q}{P \to Q \lor R \Rightarrow P \to Q}\,L\to}{P \to Q \lor R \Rightarrow (P \to Q) \lor (P \to R)}\,R\lor_1$$

となり、一番上の $L\rightarrow$ のところでループに入っていることがわかる。
　最後の規則が $R\vee_2$ の場合も、まったく同様であるから、以上によって問題の sequent の導出不可能性が証明された。QED.

(c)　古典論理では、ある論理結合子を別の論理結合子によって定義することができる。例えば、$A\vee B$ は、$\wedge$ と $\neg$ を用いて、$\neg(\neg A\wedge\neg B)$ として定義できる。このことを、古典的結合子の相互定義可能性という。しかし、直観主義では、この相互定義可能性は成立しない。上と同様にして、以下の sequent の導出不可能性が示せるからである。

(i)　$\neg(\neg A\wedge\neg B)\Rightarrow A\vee B$

(ii)　$\neg A\rightarrow B\Rightarrow A\vee B$

(iii)　$\neg(A\wedge\neg B)\Rightarrow A\rightarrow B$

(d)　直観主義命題論理の決定可能性
　以上の、導出不可能性の結果は、**G3ip** では cut や contraction が許容可能である（なしですませられる）という性質に本質的に依存していることがわかる。すなわち、それらの構造規則がないがゆえに、導出のすべての可能性を尽くすことができるのである。そしてこの「導出のすべての可能性を尽くすことができる」という事実から、直観主義命題論理の決定可能性を導くことができる。

定理 12　G3ip における sequent $\Gamma\Rightarrow C$ の導出可能性は決定可能である。

[証明]　省略。
　$L\rightarrow$ を除く他のすべての規則は、sequent の重みを減らす規則になっていることに注意しよう。下からの証明探索を行って、もはやどんな規則によっても sequent の重みを減らせない sequent に到達したとき、その sequent が公理や $L\perp$ の結論でないならば、探索は終了する。一方、$L\rightarrow$ の適用によってループに入ったならば、やはり探索は終了する。下から $L\rightarrow$ によって sequent を分解していったとき、前提として得られる sequent の数は有界だから、いずれにせよ探索は停止する。探索が停止したとき、導出の樹のすべての葉が、公理か $L\perp$ の結論ならば、endsequent は導出可能であり、そうでなければ、それは導出可能ではない。

G3cp:古典論理の G3 体系

　自然演繹体系では、直観主義論理から古典論理を得るための方法は、直観主義の規則に (1) 排中律 $A\vee\neg A$ そのものを付加するか、(3) 二重否定の除去 $\neg\neg A\vdash A$ を付加するか、あるいは (4)RAA、

$$\begin{array}{c} \neg A \\ \vdots \\ \dfrac{\bot}{A} \end{array}$$

を加えるか、であった。G-system においては、sequent の右辺に複数の式を許容する (multi succedent を認める) ことによって古典論理が得られる。逆に言えば、古典論理から直観主義を得るには、sequent の右辺に単一の式しか現れない、という制限を加えればよい。そういう観点からみると、

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}$$

という古典的な規則は、

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B}$$

という規則になる。この制限によって、特に次のような導出

$$\frac{A \Rightarrow A, \bot}{\Rightarrow A, A \to \bot}$$

は排除される。この導出が可能ならば、multisuccedent な $R\vee$ によって $A \vee$ $(A \to \bot$ が得られてしまうのである。

以下、**G3cp** の体系を示す。

G3cp

Logical axioms:

$P, \Gamma \Rightarrow \Delta, P$

Logical rules:

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \; L\wedge \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B} \; R\wedge$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \lor B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ L\lor \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \lor B}\ R\lor$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ L\to \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}\ R\to$$

$$\frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ L\bot$$

G3cp で成り立つ性質のいくつかを以下に示す。まず、**G3cp** の各規則が invertible であること、しかもそれが高さを保存する inversion であることを示そう。

定理 13　**G3cp** のすべての規則は invertible であり、しかもそれは高さを保存する。

規則が invertible であるというのは、すでに見たことだが、規則の結論である sequent が成立しているときには、その規則の前提が成立しているということである。例えば、$R\land$ は、

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \land B}\ R\land$$

であるが、このときもし（高さを保存しているのだから）$\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, A \land B$ が成立しているならば、$\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, A$ と $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, B$ とが成立していることを、規則 $R\land$ が invertible である、という。

G3cp の規則のうち、$L\land, L\lor$ および $L\to$ の第二前提については、それらが invertible であることの証明は **G3ip** での証明と同じである（ただし、sequent の右辺が C ではなく、Δ になることに注意）。$L\to$ 規則の第一前提と R 規則については、別に証明を行う必要がある。ここでは $R\land$ だけを取り上げる。

もし $\Gamma \Rightarrow \Delta, A \land B$ が公理、もしくは $L\bot$ の結論ならば、$A \land B$ が原子式でない以上、$\Gamma \Rightarrow \Delta, A$ と $\Gamma \Rightarrow \Delta, B$ も、公理であるか $L\bot$ の結論でなくてはならない。

そこで、n までの導出については高さを保存する inversion が成立していると仮定し、$\vdash_{n+1} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \land B$ であると仮定しよう。ここで二つの場合に分けて考える必要がある。

もし $A \land B$ が最後に適用された規則の主式ではないならば、その規則は $\Gamma' \Rightarrow \Delta', A \land B$ および $\Gamma'' \Rightarrow \Delta'', A \land B$ という形の前提を一つまたは二つもっているはずである。そしてこれらの前提の導出は $\leq n$ でなければならない。したがって、帰納法の仮定により、$\vdash_n \Gamma' \Rightarrow \Delta', A$ および $\vdash_n \Gamma' \Rightarrow \Delta', B$ と、$\vdash_n \Gamma'' \Rightarrow \Delta'', A$ および $\vdash_n \Gamma'' \Rightarrow \Delta'', B$ とが、それぞれ成立していなくてはならない。その上で、最後に適用された規則をこれらの前提に適用して

やれば、結論として $\Gamma \Rightarrow \Delta, A$ と $\Gamma \Rightarrow \Delta, B$ とが得られるが、これらの導出は $\leq n+1$ である。

$A \wedge B$ が最後に適用された規則の主式である場合、すなわち、$R\wedge$ の適用によって得られた場合は、その前提 $\Gamma \Rightarrow \Delta, A$ と $\Gamma \Rightarrow \Delta, B$ は、当然、n 以下の高さになっている。QED.

構造規則の許容可能性

G3cp では、weakning と contraction の規則として次の四つがある。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, LW \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\, RW \qquad \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, LC \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\, RC$$

これらに **G3cp** での cut rule,

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, D \quad D, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\, Cut$$

を加えた構造規則はいずれも admissible であることが証明できる。証明は、**G3ip** のケースに類似しており、省略するが、ポイントとなりそうないくつかのケースのみを見ておこう。

定理 14　Height-preserving contraction: もし $\vdash_n C, C, \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば、$\vdash_n C, \Gamma \Rightarrow \Delta$ である。もし $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, C, C$ ならば、$\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, C$ である。

[証明]　証明は、前提の導出の高さについての帰納法による。$n = 0$ の場合、もし前提が公理か $L\perp$ の結論ならば、contraction の帰結も公理か $L\perp$ の結論になる。そこで、帰納法の仮定として、高さ n の導出までは高さを保存した contraction が成り立っていると仮定する。ここで場合分けを行う。(1)contract される式が、最後に適用された規則の主式ではない場合、その規則の前提に帰納法の仮定を適用し、それから contraction rule を適用すればよい。(2)contract される式が、最後に適用された規則の主式である場合、その規則の種類によってさらに 6 つのサブケースに分けられる。

規則が $L\wedge$ と $L\vee$ のときは、定理 6 の場合と同じなので省略する。最後の規則が $R\wedge$ の場合、二つの前提はそれぞれ $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B, A$ と $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B, B$ である。定理 13 の invertibility により、$\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, A, A$ と $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, B, B$ が得られるが、帰納法の仮定により n までの導出については高さを保存する contraction が成立しており、それによって $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, A$ と $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, B$ が得られる。これらに $R\wedge$ を適用すれば、結論 $\vdash_{n+1} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B$ が出てくる。

規則が $R\vee$ の場合も $R\wedge$ のケースとほぼ同様に証明できる（ただし、帰納法の仮定を二回使う必要がある）。

最後の規則が $R\rightarrow$ の場合、その前提は $vdash_n A, \Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B, B$ である。height-preserving invertibility によって、$\vdash_n A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B, B$ を得る

が、これから、帰納法の仮定により$\vdash_n A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B$が得られる。これに$R \rightarrow$を適用すればよい。最後の規則が$L \rightarrow$の場合、contractionの前提の導出は次のようになっている。

$$\frac{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} L \rightarrow$$

inversionによって、$\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, A, A$と$\vdash_n B, B, \Gamma \Rightarrow \Delta$を得る。帰納法の仮定を適用し、$\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, A$と$\vdash_n B, \Gamma \Rightarrow \Delta$が得られるから、これらに$L \rightarrow$を適用して$A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta$が得られるが、この導出は高々$n+1$の高さである。QED.

以下、証明は省略するが、**G3cp**においてもcutの許容可能性が証明できる。証明の基本構造は**G3ip**のケースと同様である。

定理 15　cut規則

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, D \quad D, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} Cut$$

は、**G3cp**において許容可能である。

cutを含めた構造規則が許容可能であることから、部分式性質は**G3cp**でも成立する。

定理 16　**G3cp**においてsequent $\Gamma \Rightarrow \Delta$の導出に現れるすべての式は、$\Gamma, \Delta$の部分式である。

量化子の規則

最後に量化子の規則を付け加えることによって、**G3i**と**G3c**の体系をそれぞれ提示する。

G3i

$$\frac{A(t/x), \forall x A, \Gamma \Rightarrow C}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow C} L\forall \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A(y/x)}{\Gamma \Rightarrow \forall x A} R\forall$$

$$\frac{A(y/x), \Gamma \Rightarrow C}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow C} L\exists \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A(t/x)}{\Gamma \Rightarrow \exists A} R\exists$$

$R\forall$規則では、yはΓおよび$\forall x A$において自由変項として現れてはならないし、$L\exists$規則では、yは$\exists x A, \Gamma, C$において自由に現れてはならないことに注意。

G3c

$$\frac{A(t/x), \forall xA, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall xA, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ L\forall \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(y/x)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall xA}\ R\forall$$

$$\frac{A(y/x), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists xA, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ L\exists \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists A, A(t/x)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists A}\ R\exists$$

$R\forall$ 規則では、y は Γ, Δ および $\forall xA$ において自由変項として現れてはならないし、$L\exists$ 規則では、y は $\exists xA, \Gamma, \Delta$ において自由に現れてはならないことに注意。

さて、**G3i** および **G3c** においても、構造規則の許容可能性は成立する（証明は省略)。その結果として、

定義 16　任意の t について、$A(t/x)$ は、$\forall xA$ および $\exists xA$ の部分式である。

と定義すれば、**G3i** および **G3c** の両方において部分式性質は成立する。すなわち、

定理 17　**G3i** における $\Gamma \Rightarrow C$ の（**G3c** における $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の）導出におけるすべての式は、Γ, C の $(\Gamma, \Delta$ の）部分式である。

この性質の結果として、sequent $\Rightarrow\perp$ は導出できないということが得られる。したがって、**G3i** と **G3c** は、いずれも無矛盾である。
一方、**G3i** でしか成立しない性質もある。それを二つばかり示しておく。まず、**G3i** では、$\Rightarrow \exists xA$ の導出は、cut を使わないとすれば、$R\exists$ 規則を使用する以外にないことは明らかである。したがって、次が成立する。

定理 18　**G3i** において $\Rightarrow \exists xA$ が導出可能であるならば、あるターム t に関して、$\Rightarrow A(t/x)$ が導出可能である。

この性質は、直観主義論理のもつ existence property と呼ばれる。次に **G3i** では、$\neg\forall x\neg A \to \exists xA$ が導出できないことを示す。

定理 19　sequent $\Rightarrow \neg\forall x\neg A \to \exists xA$ は **G3i** においては導出可能でない。

[証明]　導出の下からの探索が永遠に止まらないことを示す。root からの探索を行うとき、まず考えられるのは、次の二つのケースである。

$$\dfrac{\dfrac{\neg\forall x\neg A \Rightarrow \forall x\neg A \quad \perp\Rightarrow \exists xA}{\neg\forall x\neg A \Rightarrow \exists xA}\ L\to}{\Rightarrow \neg\forall x\neg A \to \exists xA}\ R\to \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\forall x\neg A \Rightarrow \forall x\neg A \quad \perp\Rightarrow A(t/x)}{\neg\forall x\neg A \Rightarrow A(t/x)}\ L\to}{\neg\forall x\neg A \Rightarrow \exists xA}\ R\exists}{\Rightarrow \neg\forall x\neg A \to \exists xA}\ R\to$$

これらを見比べればわかるのだが、右の導出は左の導出の成功に帰着するから、以下は、左の導出をどう続けるかだけを検討すればよい。左の導出の第一（左）前提を続けてゆくのに可能な手は、$L\to$ か $R\forall$ だけである。$L\to$ で

展開するとループに入ってしまうことがわかる。したがって、$R\forall$ だけを考えればよい。それを展開してゆけば、次のようになる。

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\neg\forall x\neg A, A(y/x), A(z/x) \Rightarrow\perp}{\neg\forall x\neg A, A(y/x) \Rightarrow \neg A(z/x)}\, R\rightarrow
}{\neg\forall x\neg A, A(y/x) \Rightarrow \forall x\neg A}\, R\forall
\qquad \perp, A(y/x) \Rightarrow\perp
}{\neg\forall x\neg A, A(y/x) \Rightarrow\perp}\, L\rightarrow
}{\neg\forall x\neg A \Rightarrow \neg A(y/x)}\, R\rightarrow
}{\neg\forall x\neg A \Rightarrow \forall x\neg A}\, R\forall
\qquad \perp\Rightarrow \exists xA
}{
\dfrac{\neg\forall x\neg A \Rightarrow \exists xA}{\Rightarrow \neg\forall x\neg A \rightarrow \exists xA}\, R\rightarrow
}\, L\rightarrow
$$

これをよく見てみると、$L\rightarrow$ の左前提でかならず $R\forall$ を適用しなくてはならないことがわかる。そしてその度ごとに変項条件を満たすために新しい変項を選ばなくてはならず、その結果、$\neg\forall x\neg A, A(y/x), A(z/x), \ldots \Rightarrow\perp$ という終わらない seqents が生成してしまい、導出の探索が停止しないことがわかる。