ファジィ積分を使った評価法

高萩栄一郎 (専修大学 E-mail:takahagi@isc.senshu-u.ac.jp)

2013 年 4 月 24 日

1　ファジィ測度・ショケ積分

1.1　作業員の例

1.1.1　2 人の場合

ファジィ測度・ショケ積分モデルを理解するために，次のような問題を考える．

例題 1:作業員の問題
ある作業所で，作業員 A,B が働いて，製品を作成している．作業員 A は，1 時間あたり 30kg 作成でき，作業員 B は，1 時間あたり 20kg 作成できる．作業員 A,B が協力して作成すると，1 時間あたり 60kg 作成できる．
ある日，作業員 A は，始業時から 8 時間，B は 6 時間作業をする．その日は，何 kg の製品を作成できるでしょうか？　ただし，作業時間のうち，協力してできるときは，協力して作業をするものとする．

次のように考えれば，簡単に解くことができる．

最初の 6 時間は，作業員 A,B がともにいるので，協力して作業をし，1 時間あたり 60kg 作成する．60k$g \times 6$ 時間 $=$ 360kg 作成する．また，B が作業を終えた後の 2 時間は，A が単独で作業をするので，1 時間あたり 30kg 作成する．30k$g \times 2$ 時間 $=$ 60kg 作成する．合計 $360 + 60 = 420$kg 作成できる．

実は，この計算がファジィ測度・ショケ積分モデルになっている．それぞれの作業員の 1 時間あたり作成量（含む：協力した場合）がファジィ測度に対応し，8 時間と 6 時間という作業時間を与えて，420kg という作成量を計算する方法がショケ積分に対応する．

1.1.2　ファジィ測度・入力値・ショケ積分

例題 1 の場合，1 時間あたりの作成可能量がファジィ測度に対応する．A だけ，B だけ，A と B が協力は，集合を使って表すと便利なので，$\{A\}$,$\{B\}$,$\{A,B\}$ と書き，ファジィ測度は，その関数として，

$$g_1(\{A\}) = 30,\ \ g_1(\{B\}) = 20,\ \ g_1(\{A,B\}) = 60 \tag{1}$$

と書く (g の添え字の 1 は例題 1 の 1 を表す).

作業時間は，ショケ積分の入力値なっており．A の作業時間を $h(A)$，B のを $h(B)$ と表す．

図 1 は，ショケ積分の図解である．

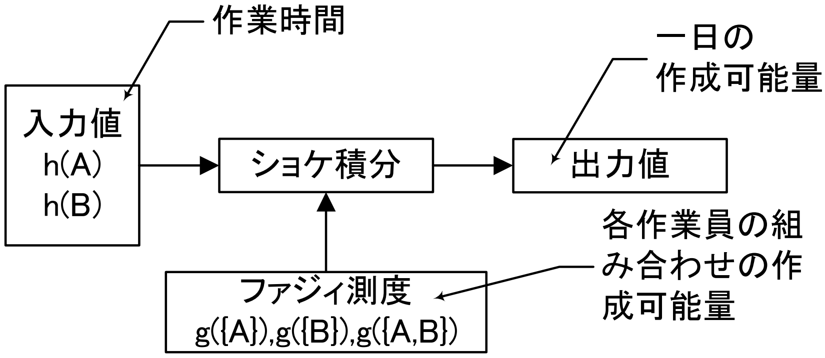

図 1　ショケ積分の図解

1.1.3　優加法性

式 (1) のファジィ測度は，2 人協力したときは，別個に作業したときより生産可能量が増加するので，

$$g_1(\{A\}) + g_1(\{B\}) < g_1(\{A,B\})$$

となる．このファジィ測度の関係を優加法性と呼ぶ.

1.1.4　別個に作業をするとき（加法性）

協力せずに，別個に作業する場合を考える．

例題 2:**作業員の問題**

ある作業所で，作業員 A,B が働いて，製品を作成している．作業員 A は，1 時間あたり 30kg 作成でき，作業員 B は，1 時間あたり 20kg 作成できる．作業員 A,B が別々に作成すると，1 時間あたり 50kg 作成できる．

この場合，

$$g_2(\{A\}) = 30,\ \ g_2(\{B\}) = 20,\ \ g_2(\{A, B\}) = 50$$

となり，

$$g_2(\{A\}) + g_2(\{B\}) = g_2(\{A, B\})$$

という関係になる．このような関係を加法的（足し算=加法演算）と言う．

1.1.5　非協力的な場合（劣加法性）

2 人が仲が悪く，非協力的で互いのじゃまをする場合を考える．

例題 3:**作業員の問題**

ある作業所で，作業員 A,B が働いて，製品を作成している．作業員 A は，1 時間あたり 30kg 作成でき，作業員 B は，1 時間あたり 20kg 作成できる．作業員 A,B が一緒に作成すると，1 時間あたり 40kg 作成できる．

となります．この場合，

$$g_3(\{A\}) = 30,\ \ g_3(\{B\}) = 20,\ \ g_3(\{A, B\}) = 40$$

となり，

$$g_3(\{A\}) + g_3(\{B\}) > g_3(\{A, B\})$$

という関係になる．このような関係を劣加法的と言う．

1.1.6　3 **人の場合** (**例題** 4)

作業員が A,B,C,3 人の場合を考える．

例題 4:**作業員の問題**

ある作業所で，作業員 A,B,C が働いて，製品を作成している．作業員 A は，1 時間あたり 30kg 作成でき，作業員 B は，1 時間あたり 20kg 作成でき，作業員 C は，1 時間あたり 40kg 作成できる．作業員 A,B が協力して作成すると，1 時間あたり 60kg 作成でき，作業員 A,C が協力して作成すると，1 時間あたり 80kg 作成でき，作業員 B,C が協力して作成すると，1 時間あたり 70kg 作成でき，作業員 A,B,C が協力して作成すると，1 時間あたり 110kg 作成できる．
ある日，作業員 A は，始業時から 8 時間，B は 6 時間，C は 9 時間作業をする．その日は，何 kg の製品を作成できるでしょうか？ただし，作業時間のうち，協力してできるときは，協力して作業をするものとする．

ファジィ測度を書くと，

$$\begin{aligned} g_4(\{A\}) = 30, g_4(\{B\}) = 20, g_4(\{C\}) = 40, g_4(\{A,B\}) = 60, \\ g_4(\{A,C\}) = 80, g_4(\{B,C\}) = 70, g_4(\{A,B,C\}) = 110 \end{aligned} \tag{2}$$

となる．この場合，どの組み合わせをとっても，ファジィ測度は優加法的になっている．

$$g_4(\{A\}) + g_4(\{B\})(= 50) < g_4(\{A,B\})(= 60)$$
$$g_4(\{A,B\}) + g_4(\{C\})(= 100) < g_4(\{A,B,C\})(= 110)$$

（他の組み合わせについても確認せよ）

作業員 A は 8 時間，B は 6 時間，C は 9 時間作業する．$h(A) = 8, h(B) = 6, h(C) = 9$ とする．最初の 6 時間（＝一番作業時間の少ない B の作業時間）は，3 人全員作業するので，

$$g_4(\{A,B,C\}) \times h(B) = 110 \times 6 = 660 \tag{3}$$

となり，その後 2 時間 (= 2 番目に少ない A の作業時間 – B の作業時間) は，A,C が作業するので，

$$g_4(\{A,C\}) \times \{h(A) - h(B)\} = 80 \times 2 = 160 \tag{4}$$

となり，最後の 1 時間 (= 1 番作業時間の多い C の作業時間 – A の作業時間) は，C 単独で作業するので，

$$g_4(\{C\}) \times \{h(C) - h(A)\} = 40 \times 1 = 40 \tag{5}$$

となり，合計 860kg 作成可能である．

1.1.7　練習問題

(1)　3 人の作業員で，A 単独で毎時 50kg,B 単独で毎時 90kg, C 単独で毎時 40kg 作成できるとする．優加法的になるようになるように，他のファジィ測度の値を定めよ．

(2)　(1) のファジィ測度で，始業時から A は 8 時間，B は 9 時間，C は 5 時間作業をするとする．合計の作成可能量を計算せよ．

1.2　表の形で計算，図解

1.2.1　表の形で計算，図解

いままでは，作業員の数は，2 人または，3 人であった．人数が多くなると計算が複雑になる．また，3 人の場合でも多少，面倒になっている．そこで，表の形にまとめて計算することにする．例題 4 のファジィ測度 (式 (2)) で，$h(A) = 8, h(B) = 6, h(C) = 9$ とする．

表 1　例題 4 の表による計算

順位	作業者	作業時間	差異	作業者 (累積)	作成可能量	積
1	C	9	1	{C}	40	40
2	A	8	2	{A,C}	80	160
3	B	6	6	{A,B,C}	110	660
					合計	860

表の作成手順は，次のようにする．

(1)　作業時間の長い順に並べ替え，順位，作業者，作業時間の列を記入する（同順位の場合，記入する順序は任意）

(2)　差異の列に，下の行との作業時間の差異を記入していく．最下行は，0 との差異を記入する．

(3)　作業者（累積）の列は，上から作業者を累積させる．この累積は，その行で作業をしている作業員になる．

(4)　(3) のファジィ測度を記入する．たとえば，(3) が $\{A, C\}$ であれば，$g(\{A, C\})$ の値を記入する．

(5)　積の列に，差異 $\times$ 作成可能量 を計算し記入する．

(6)　積の列の合計を計算する．この値がショケ積分値 (その日の作成量) となる．

図 2 は，この計算の図解である．赤の線と軸で囲まれた部分の面積は，3 人が協力して働いた分である．3 人で働いた時間は，6 時間で毎時 110 生産しているので，赤の面積 660kg である．A と C が協力したのは，6〜8 時間目の 2 時間で，毎時 80kg なので，160kg である．これは，赤の上と緑の線と軸で囲まれた長方形の面積になる．C 単独で働いたのは，8〜9 時間目の 1 時間で毎時 40kg，したがって，青と緑の上で囲まれた部分の面積である．したがって，3 つの長方形の合計，各線で囲まれた部分の面積（重複した部分は 1 回のみ計算）がショケ積分値になる．

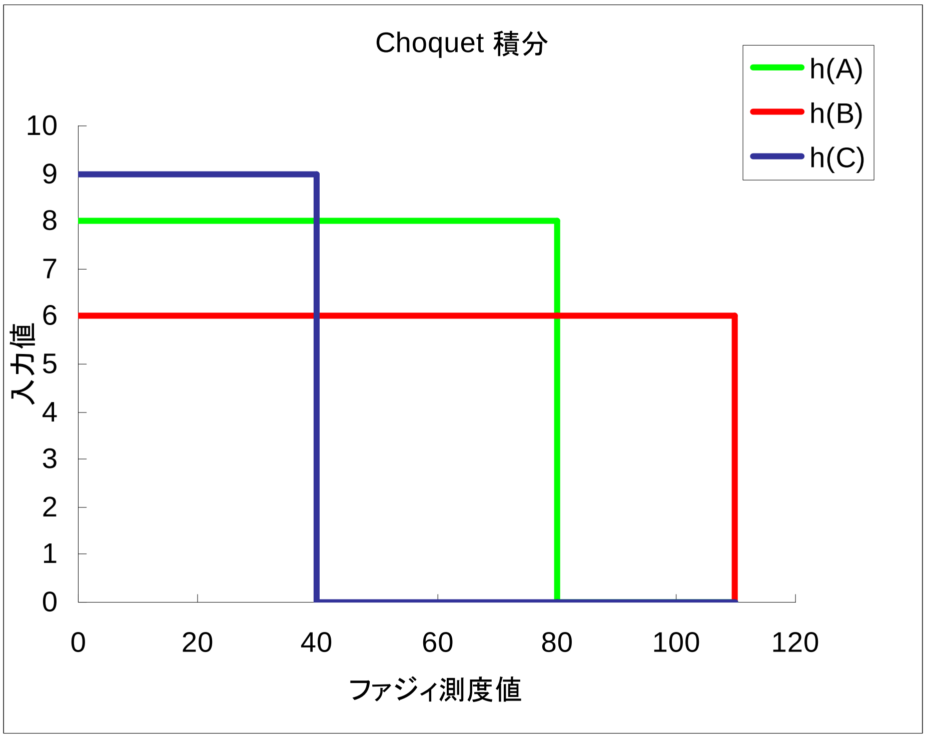

図 2　$n = 3$ の場合の図解

1.2.2　練習問題

例題 4 のファジィ測度 (式 (2) を用い，次の作業時間のときの作成量（ショケ積分値）を表を使って作成しなさい．

(1)　A が 8 時間，B が 6 時間，C が 4 時間の場合

順位	作業者	作業時間	差異	作業者 (累積)	作成可能量	積
1						
2						
3						
					合計	

(2)　A が 8 時間，B が 10 時間，C が 8 時間の場合

順位	作業者	作業時間	差異	作業者 (累積)	作成可能量	積
1						
2						
3						
					合計	

1.3　いろいろな例

これまでは，作業員の例で説明してきた．この場合，入力値が作業員の作業時間 $h(A), h(B), h(C)$ で，出力値を z とする．このとき，作業員の集合 $X = \{A, B, C\}$ で表す．X は，他の例では，入力値の集合とか評価対象の集合とよぶ．ファジィ測度は，このショケ積分の計算に使う値（パラメータ）である．

1.3.1　ランチ

例題 5:**ランチ**
あるテクアウトの洋食屋では，昼間，ランチとコーヒーやデザートをセットにしたものを値引きして販売している．価格は，次のようになっている．
ランチ単品 800 円, コーヒー単品 350 円, デザート単品 500 円，A セット (ランチ + コーヒー)1000 円，B セット (ランチ + デザート)1100 円，C セット (ランチ + コーヒー + デザート)1250 円，デザートセット (デザート + コーヒー）700 円である．
ランチを 8 個，コーヒーを 5 個，デザートを 6 個注文するとき，うまく組み合わせるといくらになるか？

ランチを L，コーヒーを C，デザートを D とすると，入力値の集合は，$X = \{L, C, D\}$ となる．問題から，ファジィ測度を作ると，

$$g_5(\{L\}) = 800, g_5(\{C\}) = 350, g_5(\{D\}) = 500, g_5(\{L, C\}) = 1000,$$
$$g_5(\{L, D\}) = 1100, g_5(\{C, D\}) = 700, g_5(\{L, C, D\}) = 1250,$$

となる．

入力値は，注文量で，$h(L) = 8, h(C) = 5, h(D) = 6$ となる．ショケ積分を計算すると表 2 のようになる．

表 2　例題 5 の表による計算

順位	項目	$h(*)$	差異	累積	ファジィ測度値	積
1	L	8	2	{L}	800	1600
2	D	6	1	{L,D}	1100	1100
3	C	5	5	{L,C,D}	1250	6250
					合計	8950

1.3.2　練習問題

(1)　ランチが 11 個，デザートが 15 個，コーヒーが 1 個の場合を計算せよ．

順位	項目	$h(*)$	差異	累積	ファジィ測度値	積
1						
2						
3						
					合計	

(2)　すべてのファジィ測度の関係で，劣加法的になっていることを確かめよ．

1.3.3　ハンバーガーショップ (練習問題)

例題 6:ハンバーガーショップ

あるハンバーガーショップでは，ハンバーガー (B) とコーラ (C) やポテト (P) をセットにしたものを販売している．価格は，次のようになっている．

ハンバーガー単品 250 円, コーラ単品 150 円，ポテト単品 100 円, ドリンクセット (ハンバーガーとコーラ）300 円, ポテトセット (ハンバーガーとポテト）300 円, スペシャルセット (ハンバーガーとコーラ，ポテト）350 円,

入力値の集合を $X = \{B, C, P\}$ とする．

(1) ファジィ測度をすべて記述せよ．ポテトとコーラのセットはないので，単品でコーラとポテトを購入した金額がポテトとコーラを合わせて購入した金額になる．

(2) ハンバーガーを 6 個 ($h(B) = 6$)，コーラを 8 個 ($h(C) = 8$)，ポテトを 4 個 ($h(P) = 4$) を購入した金額をショケ積分を使って求めよ．

順位	項目	$h(*)$	差異	累積	ファジィ測度値	積
1						
2						
3						
					合計	

2　いろいろな平均演算

2.1　平均計算

2.1.1　単純平均

よく知られている算術平均は，加法的なファジィ測度を割り当てることによりショケ積分で表現できる．たとえば，国語と数学の平均点を求めるとき，$X = \{J, M\}$ とし，

$$g(\{J\}) = 0.5, g(\{M\}) = 0.5, g(\{J, M\}) = g(\{J\}) + g(\{M\}) = 1$$

として，ショケ積分を計算する．たとえば，$h(J) = 50, h(M) = 80$ のときは，次の計算表のように，平均値 65 点となる．

順位	項目	$h(*)$	差異	累積	ファジィ測度値	積
1	M	80	30	$\{M\}$	0.5	15
2	J	50	50	$\{J, M\}$	1.0	50
					合計	65

2.1.2　重み付き平均

次に，重み付き平均を考える．評価対象は，国語 (J)，数学 (M)，英語 (E) とする ($X = \{J, M, E\}$)．国語の重みを 50%, 数学の重みを 30%, 英語の重みを 20% とし，国語の得点を $h(J)$, 数学の得点を $h(M)$, 英語の得点を $h(E)$ とする．通常の重みつき平均の計算式は,

$$0.5 \times h(J) + 0.3 \times h(M) + 0.2 \times h(E) \tag{6}$$

となる．ファジィ測度は，加法的に割り当て,

$$\begin{aligned} g(\{J\}) = 0.5, g(\{M\}) = 0.3, g(\{E\}) = 0.2, \\ g(\{J, M\}) = g(\{J\}) + g(\{M\}) = 0.8, \\ g(\{J, E\}) = g(\{J\}) + g(\{E\}) = 0.7, \\ g(\{M, E\}) = g(\{M\}) + g(\{E\}) = 0.5, \\ g(\{J, M, E\}) = g(\{J\}) + g(\{M\}) + g(\{E\}) = 1 \end{aligned}$$

とする．このファジィ測度を使って，ショケ積分を計算すれば，式 (6) の重み付き平均に一致する．

たとえば，$h(J) = 50, h(M) = 80, h(E) = 65$ の場合，

順位	項目	$h(*)$	差異	累積	ファジィ測度値	積
1	M	80	15	$\{M\}$	0.3	4.5
2	E	65	15	$\{M, E\}$	0.5	7.5
3	J	50	50	$\{J, M, E\}$	1.0	50
					合計	62

となり，重み付き平均に一致する．

2.1.3　平均演算のショケ積分解釈

試験の総合評価では，平均点による評価がよく行われてきた．本小節では，平均計算をファジィ測度，ショケ積分で解釈してみる．

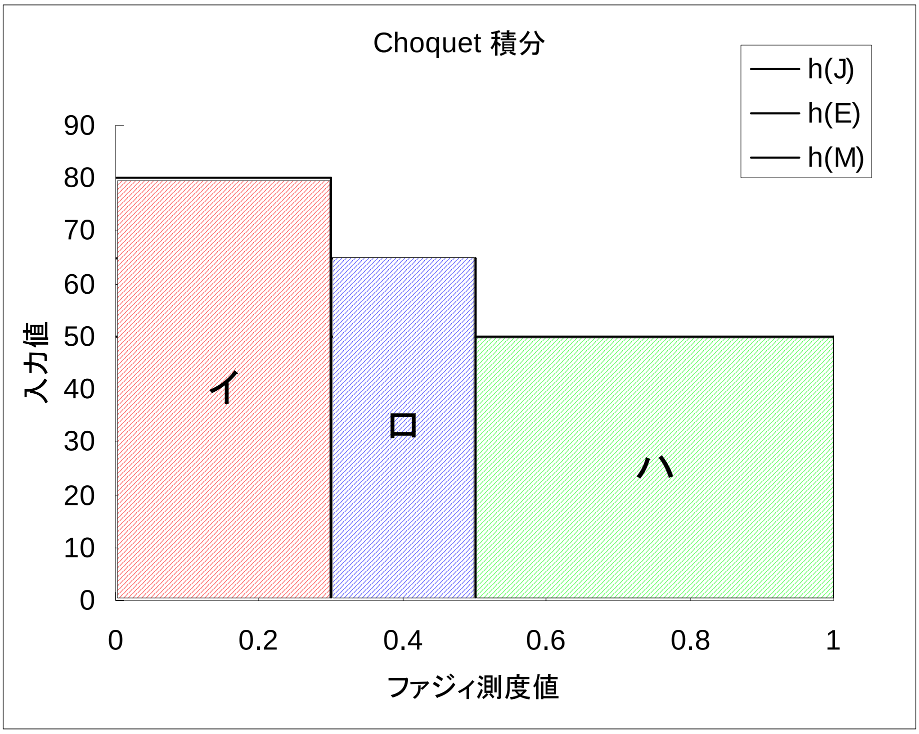

図 3　平均値計算の図解 1

前節と同様，J の重みを 50%,M を 30%,E を 20% とし，$h(J) = 50, h(M) = 80, h(E) = 65$ で，平均を考える．図 3 は，通常の方法での平均点を求めている．（イ）が M,（ロ）が E,（ハ）が J を表している．各色で，高さは得点 ($h(*)$)，横幅は重みを表しており，その

面積が各科目の評価値で，すべての面積の和（イ＋ロ＋ハ）が，平均を表している．

図 4 は，同じ計算をショケ積分で計算したものであり，次のように解釈する．

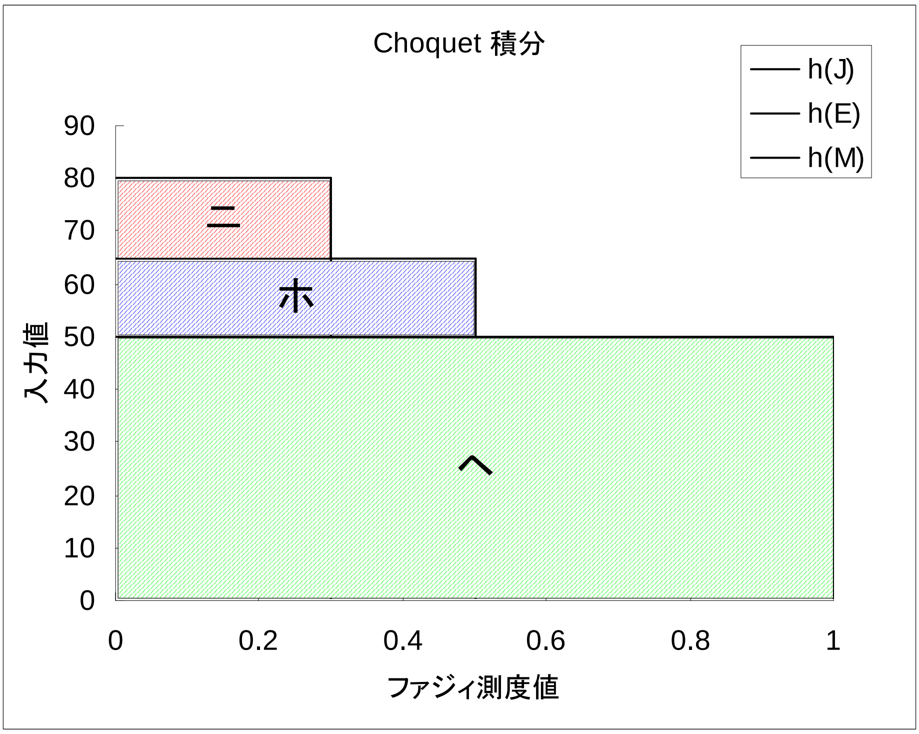

図 4　平均値計算の図解 2

入力値が 0〜50 の部分　3 科目の能力や効果があるとして，3 科目分のファジィ測度 $\mu(\{J, M, E\}) = 0.5 + 0.3 + 0.2 = 1$ で評価する．$(50 - 0) \times 1 = 50$（への部分の面積）を 3 科目できたことによる評価値とする．

入力値が 50〜65 の部分　M,E の 2 科目の能力や効果があるとして，M,E の 2 科目分のファジィ測度 $\mu(\{M, E\}) = 0.3 + 0.2 = 0.5$ で評価する．$(65 - 50) \times 0.5 = 7.5$（ホの部分の面積）を M,E 科目ができたことによる評価値とする．

入力値が 65〜80 の部分　M の 1 科目の能力や効果があるとして，M,1 科目分のファジィ測度 $\mu(\{M\}) = 0.3$ で評価する．$(80 - 60) \times 0.3 = 4.5$（ニの部分の面積）を M 科目ができたことによる評価値とする．

ショケ積分値，重み付き平均値　3 つの部分の面積の和（ニ＋ホ＋ヘ）が，平均を表している．

重み付き平均の場合のファジィ測度は常に重みの和であった．しかし，科目間の相互作用（合わさった効果など）を考慮すると違うファジィ測度の値が考えられる．

たとえば，M と E の両方の得点があることを，M 単独や E 単独の和よりよくすることもできる（優加法性）．すなわち，M と E 両方できれば，補完的な効果（相乗効果）があるとして，より高い重みを付けホの長方形の横を伸ばす．

$$g(\{M\}) + g(\{E\}) < g(\{M, E\})$$

この場合，$g(\{M, E\})$ の長さの増大に対応して，$g(\{J, M, E\})$ も大きくする．

2.2　ファジィ測度による 優加法的な評価，劣加法的な評価

2.2.1　優加法的な評価

単純平均を拡張して，優加法的な評価を行う．国語と数学の例で，等重み (50%,50% づつの重み）とする．これは，国語と数学両方できていることを高く評価する．逆に言うと，片方だけの場合，両方の場合より低く評価する．

ファジィ測度は優加法的に設定するので，

$$g(\{J\}) + g(\{M\}) < g(\{J, M\})$$

となるようにする．たとえば，

$$g(\{J\}) = 0.5, g(\{M\}) = 0.5, g(\{J, M\}) = 2.5$$

とする．しかし，平均演算のとき，全体を 1($g(\{J, M\}) = 1$) にするということになっている[*1]ので，2.5 で割り，

$$g(\{J\}) = 0.2, g(\{M\}) = 0.2, g(\{J, M\}) = 1 \tag{7}$$

とする．この全体を 1 にすることを正規化という．

この場合，国語が 40 と数学が 60 点の場合（ケース 1) と国語が 20 点，数学が 80 点の場合（ケース 2) を比べたとき，優加法的にファジィ測度を割り当てるので，2 つの科目がともにあること（2 つの科目の作用がより協力すること，2 つの科目に補完的な関係があ

[*1] 全科目で同じ点数の時，平均点もその点数にする．

ること）が総合評価をよりよくするので，単独の科目が良いことよりより，ケース 1 の場合の総合評価の方が高くなる．計算してみると，ケース 1 の場合，

順位	項目	$h(*)$	差異	累積	ファジィ測度値	積
1	M	60	20	$\{M\}$	0.2	4
2	J	40	40	$\{J,M\}$	1	40
					合計	44

となり，ケース 2 の場合，

順位	項目	$h(*)$	差異	累積	ファジィ測度値	積
1	M	80	60	$\{M\}$	0.2	12
2	J	20	20	$\{J,M\}$	12	20
					合計	32

となり，ケース 1 の方が高総合評価値になる．

2.2.2 劣加法的な評価

劣加法的な評価を行う．国語と数学の例では，等重み (50%,50% づつの重み）とし，片方だけでもできていることを高く評価する．逆に言うと，両方できてきてることよりも，片方がよりよくできていることを高く評価する．

ファジィ測度は劣加法的に設定するので，

$$g(\{J\}) + g(\{M\}) > g(\{J,M\})$$

となるようにする．たとえば，

$$g(\{J\}) = 0.5, g(\{M\}) = 0.5, g(\{J,M\}) = 0.625$$

とする．同様に 0.625 で割り，正規化をすると，

$$g(\{J\}) = 0.8, g(\{M\}) = 0.8, g(\{J,M\}) = 1$$

とする．

この場合，先程のケース 1 とケース 2 を比べたとき，劣加法的にファジィ測度を割り当てるので，2 つの科目がともにあること（2 つの科目の作用がより協力すること）が総合

評価をよりよくすることより，単独の科目が良いことの方を高く評価するので，ケース 2 の場合の総合評価の方が高くなる．計算してみると，ケース 1 の場合，

順位	項目	$h(*)$	差異	累積	ファジィ測度値	積
1	M	60	20	$\{M\}$	0.8	16
2	J	40	40	$\{J, M\}$	1	40
					合計	56

となり，ケース 2 の場合，

順位	項目	$h(*)$	差異	累積	ファジィ測度値	積
1	M	80	60	$\{M\}$	0.8	48
2	J	20	20	$\{J, M\}$	1	20
					合計	68

となり，ケース 2 の方が高総合評価値になる．

2.3 重みからファジィ測度を求める (ϕ_s 変換法)

科目数が多くなったり，重要度を与え場合など，個別にファジィ測度を割り当てていくのは，困難が伴う．そこで，重みの合計を求め，その合計からファジィ測度の値を割り当てることを考える．

図 5 は，優加法的にファジィ測度を割り当てる関数の例である．これは，式 (7) の例のような優加法的である．式 (7) の例では，J,M とも等重み (0.5) であるので，図 5 の 0.5 のときの値である 0.2 を使い，$g(\{J\}) = 0.2, g(\{M\}) = 0.2$ とする．

また，J の重みを 0.7, E の重みを 0.3 とすると，0.7 のところを読み，$g(\{J\}) = 0.40$, 0.3 のところを読み，$g(\{E\}) = 0.05$ とする．これは，$0.40 + 0.05 = 0.45 < 1$ となり，優加法的である．

図 6 は，劣加法的な場合で，式 (8) の例である．式 (7) の例では，J,M とも等重み (0.5) であるので，図 6 の 0.5 のときの値である 0.8 を使い，$g(\{J\}) = 0.8, g(\{M\}) = 0.8$ とする．

また，J の重みを 0.7, E の重みを 0.3 とすると，0.7 のところを読み，$g(\{J\}) = 0.91$, 0.3 のところを読み，$g(\{E\}) = 0.63$ とする．これは，$0.91 + 0.63 = 1.54 > 1$ となり，劣加法的である．

図 7 は，さまざな ξ の ϕ_s 変換のグラフである．$u = 0.5$ のときの値が ξ の値である．

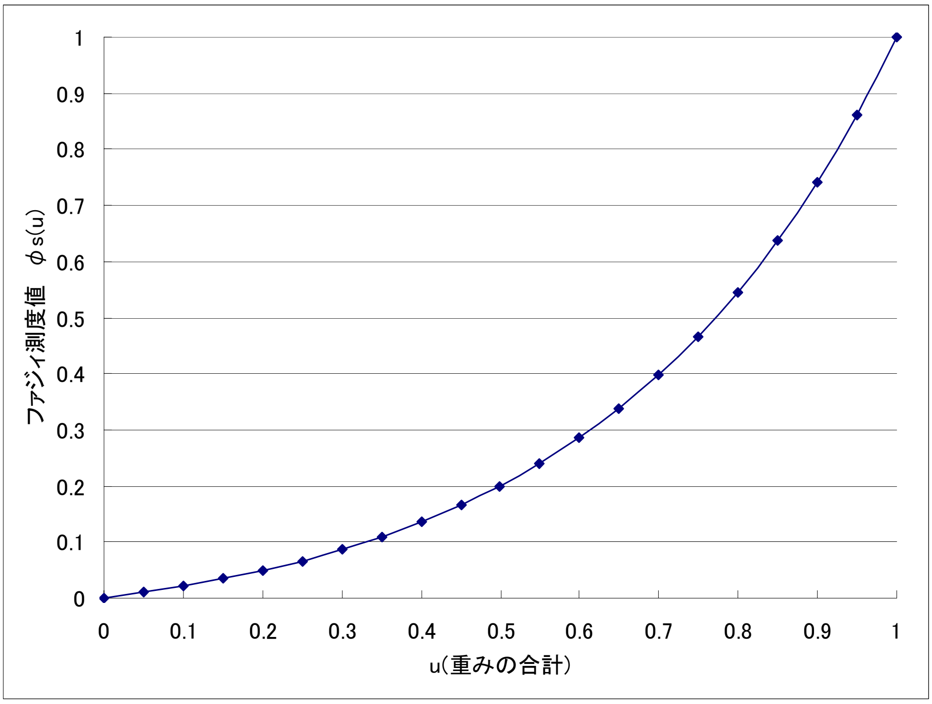

図 5　優加法的な場合，重みからファジィ測度値 (ϕ_s 変換,$\xi = 0.2$)

$\xi = 0.5$ の曲線が，加法的な場合の曲線である．$\xi < 0.5$ のとき，$\xi = 0.5$ の曲線より下にあり，優加法的なファジィ測度を作り出す．$\xi = 0$ のとき，$u = 1$ のときを除いて，ϕ_s 変換の値は 0 になる．

逆に，$\xi > 0.5$ のとき，$\xi = 0.5$ の曲線より上にあり，優加法的なファジィ測度を作り出す．$\xi = 1$ のとき，$u = 0$ のときを除いて，ϕ_s 変換の値は 1 になる．

2.4　ϕ_s 変換の求め方 (参考)

ϕ_s 変換は，次の計算式で求める．

$0 < \xi < 0.5$ または $0.5 < \xi < 1$ の場合

$$s = \frac{(1-\xi)^2}{\xi^2} \tag{8}$$

で，s を求め，

$$\phi_s(u) = \frac{s^u - 1}{s - 1} \tag{9}$$

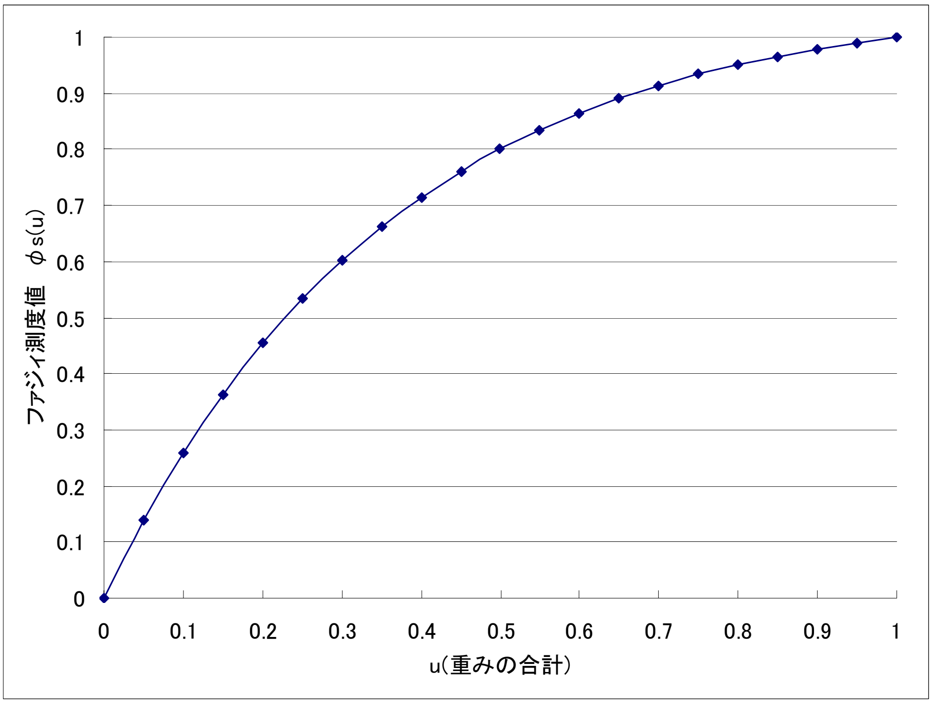

図 6　劣加法的な場合，重みからファジィ測度値 (ϕ_s 変換,$\xi = 0.8$)

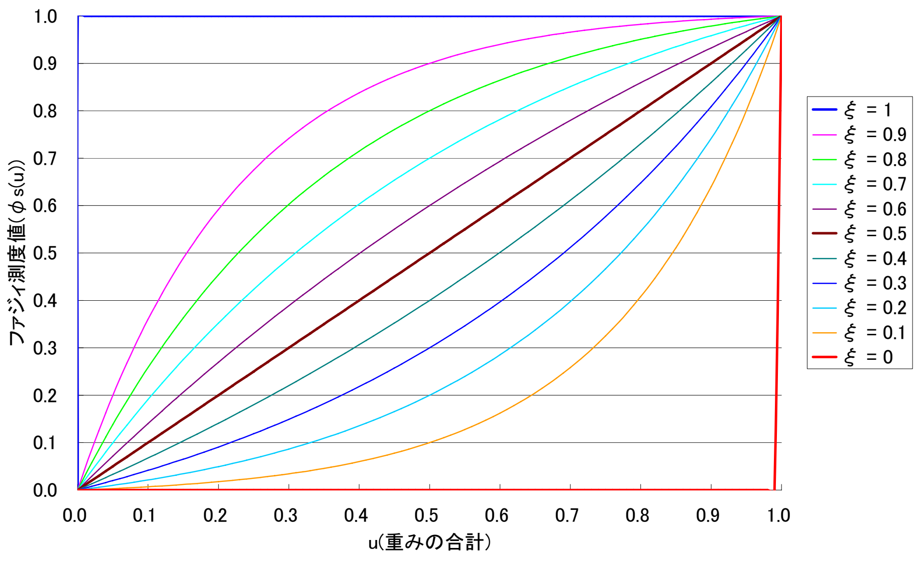

図 7　重みからファジィ測度値を求める関数 (ϕ_s 変換)

で，ファジィ測度を求める．

$\xi = 0.5$ **の場合**

$$\phi_s(u) = u \tag{10}$$

$\xi = 0$ **の場合**

$$\phi_s(u) = \begin{cases} 0 & (u \neq 1) \\ 1 & (u = 1) \end{cases} \tag{11}$$

$\xi = 1$ **の場合**

$$\phi_s(u) = \begin{cases} 0 & (u = 0) \\ 1 & (u \neq 0) \end{cases} \tag{12}$$

2.5 ϕ_s 変換によるファジィ測度の割り当て方

ϕ_s 変換では，s と重みの累積値から求めるだが，本テキストでは，ξ を使っているので，別に割り当て関数 f を用意する．

$$f(\xi, u) = \phi_s(u), \text{ただし } s = \frac{(1-\xi)^2}{\xi^2} \tag{13}$$

とする．ξ は，§2.6 で述べる相互作用の指標で，u は，重みの累積値である．

3 科目 $X = \{J, M, E\}$ の場合で，J の重みが 0.4 ($w_J = 0.4$)，M の重みが 0.3 ($w_M = 0.3$)，E の重みが 0.3 ($w_E = 0.3$) としする．重みの合計は 1 になるようにする．優加法的 $\xi = 0.3$ のファジィ測度を求める．

各集合のファジィ測度は，その集合の各要素の重みの合計を u とし，ϕ_s 変換で求める．ファジィ測度を求めると，

$$\begin{aligned}
g'(\{J\}) = f(\xi, w_J) = f(0.3, 0.4) &= 0.2182 \\
g'(\{M\}) = f(\xi, w_M) = f(0.3, 0.3) &= 0.1491 \\
g'(\{E\}) = f(\xi, w_E) = f(0.3, 0.3) &= 0.1491 \\
g'(\{J, M\}) = f(\xi, w_J + w_M) = f(0.3, 0.7) &= 0.5118 \\
g'(\{J, E\}) = f(\xi, w_J + w_E) = f(0.3, 0.7) &= 0.5118 \\
g'(\{M, E, \}) = f(\xi, w_M + w_E) = f(0.3, 0.6) &= 0.3969 \\
g'(\{J, M, E, \}) = f(\xi, w_J + w_M + w_E) = f(0.3, 1) &= 1
\end{aligned}$$

となる．

$h(J) = 80, h(M) = 60, h(E) = 20$ の例でショケ積分を計算する．

順位	項目	$h(*)$	差異	累積	ファジィ測度値	積
1	J	80	20	$\{J\}$	0.2182	4.364
2	M	60	40	$\{J, M\}$	0.5118	20.472
3	E	20	20	$\{J, M, E\}$	1	20
					合計	44.836

優加法的であるので，平均から下方にひっぱられていて，平均以下の数値になる．

2.6 ξ の意味と決め方

図 8 は，ξ の図解で，$\xi = 0.5$ で，加法的なファジィ測度になり，そのファジィ測度でショケ積分をすると（重み付き）平均値になる．

ξ に値が 0 に近づけば近づくほど，優加法的なファジィ測度になり，補完的な評価 (すべての入力値がほぼよいことが必要) になる．0 になると，入力値の最小値を出力するようになる．

逆に，ξ に値が 1 に近づけば近づくほど，劣加法的なファジィ測度になり，代替的な評価（1 つでもよい入力値があれば高く評価）になる．1 になると，入力値の最大値を出力するようになる．

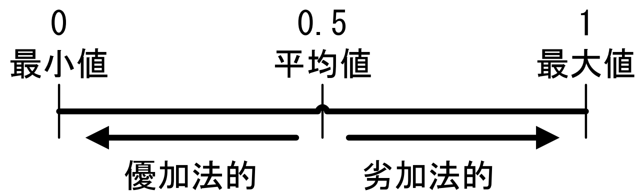

図 8　ξ の図解

表 3 は，ξ の意味を書いたものである．λ は，§**??**で説明する．

2.7 ξ を変化させての感度分析

ξ を変化させて総合評価値がどう変化するかをいくつかの入力値のパターンを使って，グラフ化し，分析をする．

表 3　ξ の意味

λ ξ	$\lambda > 0$ 0.5 より小	$-1 < \lambda < 0$ 0.5 より大
ファジィ測度	優加法的	劣加法的
一般的な 呼び方	補完的 相乗効果	代替的 相殺効果
その他の 呼び方 (相互作用が 外部にある 場合)	バランス重視 消極的な 慎重な 悲観的な 保守的な 悪い点がないことを評価 確実性重視	個性重視 積極的な 大胆な 楽観的な 冒険的な よい点があることを評価 可能性重視
極端な場合	$\xi = 0$	$\xi = 1$
(入力の数基準 の場合のみ)	AND MIN(最小値)	OR MAX(最大値)

表 4　感度分析

	$h(1)$	$h(2)$	$h(3)$
重み	0.33	0.33	0.33
入力値 1	40	50	60
入力値 2	30	50	70
入力値 3	50	50	50

図 9 は，表 4 の入力値と重みを用い，ξ を変化させたグラフ（感度分析）である．（練習問題 次の 2 つの値のペアを ξ を変化させて，比較せよ）

- 40,50,60 VS 30,50,70
- 50,50,50 VS 30,70,80
- 50,50,50 VS 10,20,70

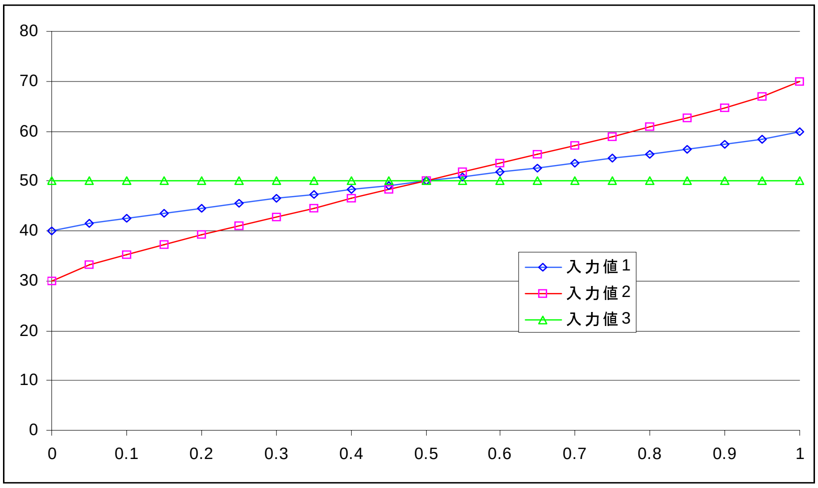

図 9　感度分析 (ξ を変化させて出力値の変化を見る)

2.8　異なるファジィ測度で評価

同じ入力値を異なるファジィ測度でショケ積分した場合，そのショケ積分値を比較できない．

たとえば，$\xi = 0.8$ のファジィ測度の値は $\xi = 0.2$ のファジィ測度のファジィ測度より大きくなり，ショケ積分値も大きくなる．

$\xi = 0.8$ のファジィ測度を g_1，$\xi = 0.2$ のファジィ測度を g_2 とすると，重みが 0 と 1 の場合を除いて，

$$g_1(A) > g_2(A) \tag{14}$$

となる．たとえば，§2.2.1 の優加法的な場合と §2.2.2 の劣加法的な場合のショケ積分値を比較したとき，劣加法的なファジィ測度の場合のショケ積分が優加法的な場合のショケ積分値を上回っている．

したがって，基本的に異なるファジィ測度でのショケ積分値を比較することはできない．

3　ϕ_s 変換を使ったショケ積分（実習）

本節では，マクロなどを使ったファイル「アニメと感度分析.xls」を利用する．

3.1　ϕ_s 変換にショケ積分，図解，アニメ

シート「Phis 変換にショケ積分」は，ϕ_s 変換を理解するための表である．C2 の値を変更すると相互作用の度合いが変化し，ファジィ測度が変化，ショケ積分値が変わる．また，入力値を変更して，図解を見ることができる．

シート「Phis 変換にショケ積分アニメ」は，シート「Phis 変換にショケ積分」の C2 の値を 0.01 から 0.99 まで，スピンボタンで変化するようにしたものである．スピンボタンを押し続けると，ξ の値が変化し，それに伴い，ファジィ測度が変化し，上 2 つの領域が細くなったり，太くなったりする．

上三角のボタンを押していくと，ξ の値が大きくなり，最終的 ($\xi = 1.0$) には，すべての矩形が 1 のところまで伸びる．これにより，一番高い入力値の値の面積になり，その面積は，最大の入力値にする．面積はファジィ積分値をあらわすので，$\xi = 1$ のときのファジィ積分値は，最大値に一致することがわかる．

逆に下三角のボタンを押していくと，ξ の値が小さくなり，最終的 ($\xi = 0.0$) には，一番下の矩形を除いて，矩形が 0 のところまで縮む．これにより，一番低い入力値の値の面積になり，その面積は，最小の入力値にする．$\xi = 0$ のときのファジィ積分値は，最小値に一致することがわかる．

同様に，シート「ξ の変化と総合評価値アニメ」は，ξ の変化により，それぞれの総合評価値がどのように変化するのかのアニメである．ξ の値を大きくすると，高順位の個別評価値のところが広がり，$\xi = 1$ にすると，一番大きい個別評価値だけになる．また，ξ の値を小さくすると，下位の個別評価値のところが広がり，$\xi = 0$ にすると，一番小さい個別評価値だけになる．

3.2　感度分析

感度分析は，何かの値 (たとえば，ξ) を変化させたとき，出力値がどう変化するのか分析することである．ξ を変化させたとき，ショケ積分値がどう変化するのかをグラフ化し，入力値間にどういう性質があるのかを考察する．

	A	B	C	D
1	n	3		
2				
3		h(1)	h(2)	h(3)
4	重み	0.30	0.20	0.50
5	評価対象1	40	50	60
6	評価対象2	30	20	70
7	評価対象3	50	50	50
8				
9	ショケ積分			
10	ξ	評価対象1	評価対象2	評価対象3
11	0.00	40.00	20.00	50.00
12	0.05	42.19	25.06	50.00
13	0.10	43.58	28.08	50.00
14	0.15	44.82	30.84	50.00
15	0.20	45.98	33.46	50.00
16	0.25	47.07	36.00	50.00
17	0.30	48.12	38.48	50.00
18	0.35	49.13	40.91	50.00
19	0.40	50.11	43.31	50.00
20	0.45	51.07	45.67	50.00
21	0.50	52.00	48.00	50.00
22	0.55	52.91	50.31	50.00
23	0.60	53.80	52.59	50.00
24	0.65	54.66	54.85	50.00
25	0.70	55.51	57.09	50.00
26	0.75	56.33	59.31	50.00
27	0.80	57.14	61.51	50.00
28	0.85	57.91	63.68	50.00
29	0.90	58.66	65.82	50.00
30	0.95	59.37	67.94	50.00
31	1.00	60.00	70.00	50.00
32				

図 10　感度分析の計算表

関数 = c_int(ξ, n,Inp,w)
ϕ_s 変換を使ったショケ積分を計算する (相互作用の度合い ξ と重みからファジィ測度を生成し，入力値のショケ積分値を計算する).
入力
ξ: 相互作用 ただし，$0 \le \xi \le 1$
n: 入力値（評価対象）の数
Inp : 入力値の範囲,
w : 重みの範囲（非負の値，和が 1 になる必要はない（自動で正規化)),
出力
ショケ積分値

図 10 は，ξ を変化させて，ショケ積分値がどう変化するのかを分析したものである．評価対象は，代替案など，ショケ積分値を計算する対象を表し，ここでは，それぞれ 3 つの入力 $h(1), h(2), h(3)$ を持つ．例題では，評価対象は 1,2,3 の 3 つとしている．

入出力のエリアは，次の通りである．

重みを記述するエリア B4:D4　重みを非負の数（0 以上の数）で入力する（和が 1 になるようにする必要はない).

入力値を記述するエリア B5:D7　3 つの評価対象の 3 つの入力値を非負の数（0 以上の数）で入力する．

ショケ積分値を計算したエリア (B11:D31)

計算は，次のように行う．

(1) **ξ の列の設定**　0.05 間隔で計算をする．

$\boxed{\text{A11:}}$ 0
$\boxed{\text{A12:}}$ =A11+0.05
複写元: A12
複写先: A12:A31

(2) **評価対象 1 のショケ積分値の計算**　B11 に評価対象 1 の $\xi = 0.00$ の場合のショケ積分値を計算する．ξ の値は，B11 に記述されている．
入力値の数は，B1 に記述されている．複写してもセルは変更されないので，「$」

マークつけておく．

評価対象 1 の入力値は，B5:D5 にあり，下に複写しても変更されないので，「$」マークつけておく．

重みは，B4:D4 であり，複写してもセルは変更されないので，「$」マークつけておく．

※ 下に複写するとき，変化するセルは A11 のみである．

$\boxed{\text{B11:}}$ = c_int(A11, $B$1,$B$5:$D$5,$B$4:$D$4)

複写元: B12

複写先: B12:B31

(2) **評価対象 2,3 のショケ積分値の計算**　評価対象のセルは，固定しているので，右に複写することはできない．評価対象 2,3 は，別個に計算式を設定する．

$\boxed{\text{C11:}}$ = c_int(A11, $B$1,$B$6:$D$6,$B$4:$D$4)

$\boxed{\text{D11:}}$ = c_int(A11, $B$1,$B$7:$D$7,$B$4:$D$4)

複写元: C11:D11

複写先: C11:D31

A10:D31 をグラフ化（散布図）したものを図 11 に示す．この例を考察すると，

- 評価対象 2 は，70 という高評価の入力がある一方，20 という低評価の入力もある．$\xi = 0.5$ のとき，最下位であるが，ξ を大きくしていくと，順位を上げ，$\xi = 0.65$ 付近で 1 位となる．入力値のばらつきが大きいので，1 つでもよい点があることを重視すれば（代替的な評価法），高い順位を得る．
- 評価対象 3 は，すべての入力が 50 という入力である．$\xi = 0.5$ のとき，2 位であるが，ξ を小さくしていくと，順位を上げ，$\xi = 0.35$ 付近で 1 位となる．すべての入力が同じであるので，すべての入力値がよいことが必要という補完的な評価法を使えば高順位になる．
- 評価対象 1 は，評価対象 2 と 3 の中間の性質を持っている．加重平均値 ($\xi = 0.5$ 付近) では，1 位になる．

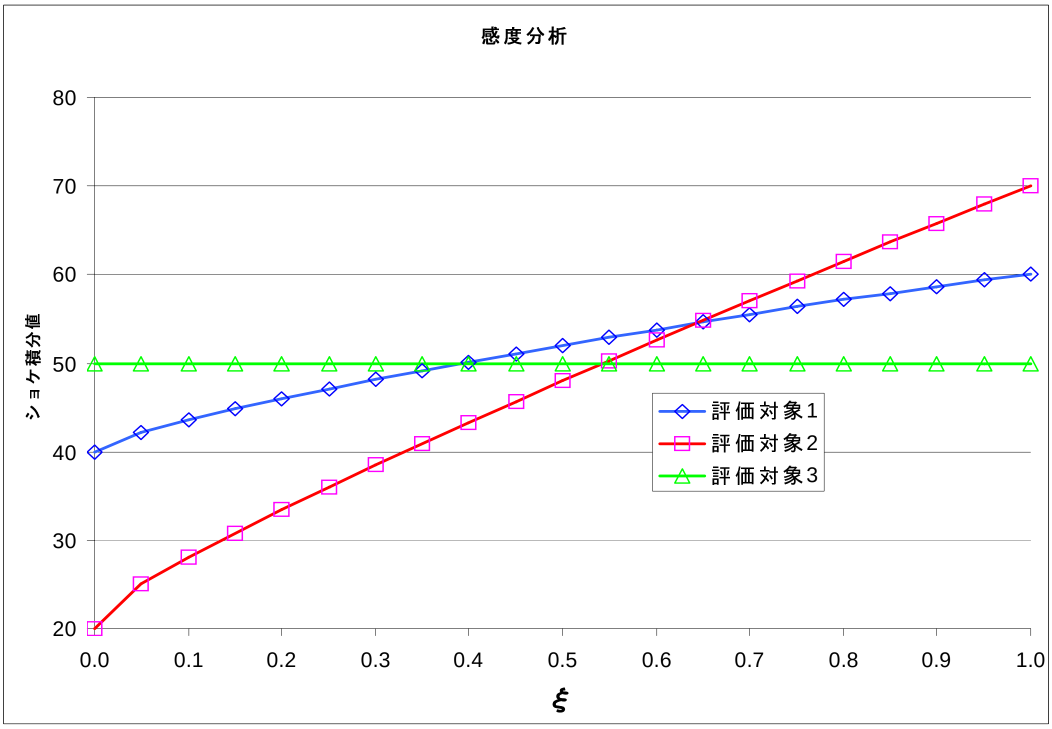

図 11　感度分析のグラフ

3.3　ショケ積分型 AHP(ファジィ AHP,HFI)

AHP では，各基準について，それぞれの代替案を一対比較で（個別）評価値を求め，基準間の一対比較から求めた重みで加重平均をして総合評価値を求める．

しかし，加重平均だと，各個別評価値間の相互作用を考えていない．例えば，商品選択では１つでも悪い点があるとそれを気にする人が多く，補完的な評価（すべての入力値がよいことが必要）をする人が多い．

例えば，服の選択で，「価格」,「デザイン」,「サイズ」,「品質」という基準があり，ある服が，「価格」,「サイズ」,「品質」はとても満足するが，「デザイン」がまったく気に入らない場合，総合評価は低いだろう．逆に，「価格」,「デザイン」,「サイズ」,「品質」について，そこそこ満足する服に高い総合評価を与えるだろう．

このような総合評価を与えるためには，加重平均に代えて，総合評価をショケ積分で計算する必要がある．商品選択では１つでも悪い点があるとそれを気にする人は，低い ξ の値（例えば，$\xi = 0.2$) を与えて総合評価を行う．

$\xi = 0.5$ として，加法的にすれば，通常の AHP の加重平均値を求めることができる．したがって，ショケ積分型 AHP は，AHP を含んだものとなる．

マーケティングなどでは，1 つでも基準を満たさないとき評価をしない評価法を非補償型の評価という．上の例で，「価格」,「デザイン」,「サイズ」,「品質」のうち，ある商品が「デザイン」が基準を下回われば，その商品の総合評価値は 0 とする評価法である．価格などの良さが，デザインの悪さを補えないので，非補償型評価法と言われる．

逆に AHP での加重平均では，デザインが悪くても，価格がよければ，デザインの悪さを補うことができる．このような評価法を補償型評価法とよばれている．

ショケ積分型評価法は，非補償型と補償型の中間に位置する (厳密には，$0 < \xi < 1$ のとき，ショケ積分型は補償型の評価法). $\xi = 0.2$ など，補完的な総合評価法では，デザインの悪さは価格などの良さで補うことができるが，その程度は小さい．デザインのほんの少しの悪さは，価格での大きな良さではないと補うことはできない評価法である．

$\xi = 0.8$ では，もっともよい評価値の基準を中心に評価する評価法である．たとえば，おいしいバイキング形式のレストランの選択で，和食のおいしさ，フレンチのおいしさ，イタリアンのおいしさ，中華のおいささを基準としたとき，どれか 1 つの基準でおいしいことを重要視するという評価法であるとする．中華のみがおいしいレストランでは，中華のおいしさの低下は，他の種（例えば，イタリアン）のおいしさの上昇ではあまり補えない．中華の少しの低下は，イタリアンの大きな上昇でないと補えないだろう．

図 12 は，教科書の AHP の例題 (p.34) をファジィ積分型にしたものである．計算の仕方は，感度分析と同じである．評価対象が代替案，入力値の名称が基準に対応する．図 13 は，ξ を変化させた感度分析である．

- 鉄観音は，ほぼすべての評価値である程度の評価を受けている．したがって，悪いところがないという評価法すると，高い総合評価値を得る．グラフでは，$\xi = 0.4$ 以下で 1 位になっている．また，$\xi = 1$ 付近で急激に上昇しているのは，色の評価値が 0.52 と高いが，その重みが 0.06 と低いため,」最大値での評価の $\xi = 1$ 付近まで，総合評価値にあまり影響を与えないためである．
- 大紅袍は，加法的な場合や代替的な評価の場合（$\xi = 0.4$ 以上）1 位になっている．大紅袍が高い評価を受けた味，香りの重みが高いので，加法的な評価の場合で高く，また，香りで 0.56 という高い評価を受けており，代替的な総合評価を行った場合も高い総合評価値を得ている．
- プーアールは，常に大紅袍の下にある．これは，プーアールが高評価の価格の重みが，味や香りに比べて低いためである．しかし，価格の評価値 0.55 が高く，これは

	A	B	C	D	E
1	n	4			
2					
3		香り	味	色	価格
4	重み	0.31	0.25	0.06	0.38
5	鉄観音	0.2955	0.2505	0.5283	0.3041
6	大紅袍	0.5644	0.5075	0.305	0.0502
7	プーアール	0.0444	0.1528	0.061	0.5462
8	龍井	0.0958	0.0892	0.1057	0.0995
9					
10	ショケ積分				
11	ξ	鉄観音	大紅袍	プーアール	龍井
12	0.00	0.25	0.05	0.04	0.09
13	0.05	0.26	0.09	0.07	0.09
14	0.10	0.27	0.13	0.09	0.09
15	0.15	0.27	0.16	0.11	0.09
16	0.20	0.28	0.19	0.13	0.09
17	0.25	0.28	0.21	0.15	0.09
18	0.30	0.28	0.24	0.17	0.09
19	0.35	0.29	0.27	0.19	0.09
20	0.40	0.29	0.29	0.21	0.10
21	0.45	0.30	0.32	0.24	0.10
22	0.50	0.30	0.34	0.26	0.10
23	0.55	0.31	0.37	0.28	0.10
24	0.60	0.31	0.39	0.31	0.10
25	0.65	0.32	0.41	0.33	0.10
26	0.70	0.32	0.44	0.36	0.10
27	0.75	0.33	0.46	0.38	0.10
28	0.80	0.34	0.48	0.41	0.10
29	0.85	0.35	0.50	0.44	0.10
30	0.90	0.36	0.52	0.47	0.10
31	0.95	0.37	0.54	0.50	0.10
32	1.00	0.53	0.56	0.55	0.11
33					

図 12　ショケ積分型 AHP の計算表

大紅袍の最大値 0.56 に匹敵し，よい点だけをみるという評価法では，大紅袍に匹敵する．

- 龍井は，すべての評価項目で，鉄観音より低い評価値で，また低い値である．そのため，どのような評価法でも 0.1 付近の低い総合評価値である．

通常の AHP($\xi = 0.5$) の総合評価値では，大紅袍が 1 位になっている．しかし，大紅袍は価格の評価値が低い．データを参照すると，100g あたり大紅袍が 5300 円，鉄観音が 2000

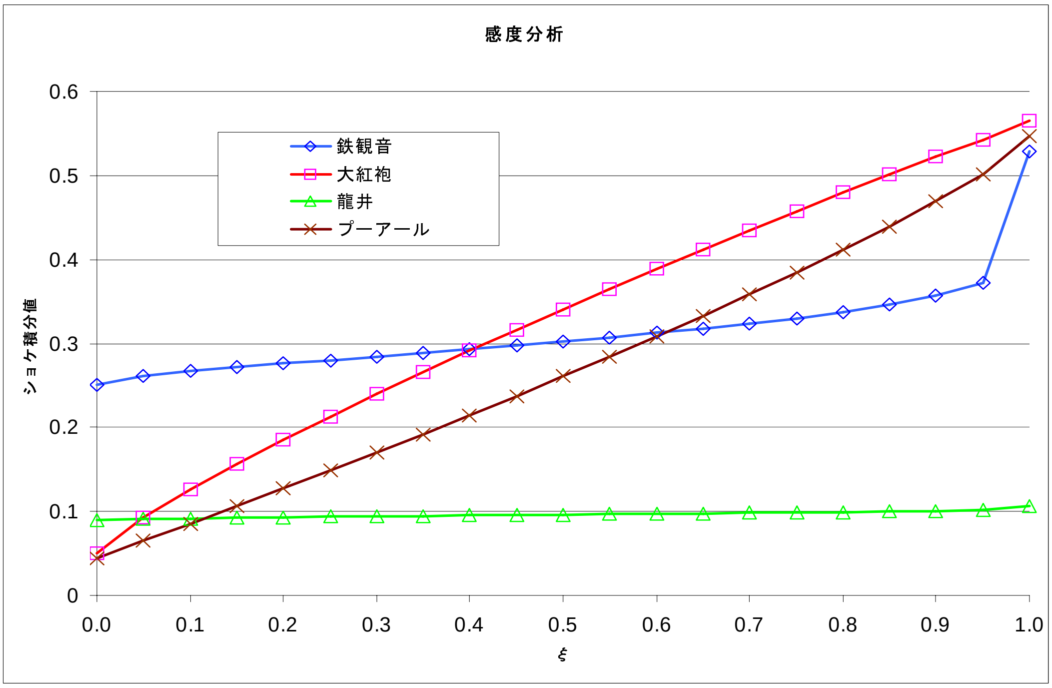

図 13　ショケ積分型 AHP の感度分析のグラフ

円と 2 倍以上の開きがあり，実感はそれ以上あるだろう．それが，大紅袍の価格の評価値 0.05 と鉄観音の 0.30 の差異に現れている．実際，購入しようかどうか考えると，価格への重みがある程度低くても気にする．そのような場合，ショケ積分型の補完的な評価 ($\xi = 0.2$ 程度）が実感に合うのではないだろうか？

■練習問題　自分が作成した AHP の問題をショケ積分型 AHP で感度分析をし，その考察を考えてみよう．