代替案の相対的な特徴分析– ショケ積分の場合の表現 –

Relative Feature Analysis among Alternatives : Choquet Integral Case

◯ 高萩　栄一郎　(Eiichiro Takahagi)
専修大学　　(Senshu University)

Abstract: Using relative individual scores among alternatives, in this paper, we propose a set function that shows the feature of an alternative. In a weighted sum model such as AHP, a set function value is constructed from the weights of the model. In a Choquet integral model such as HFI, set function values are constructed from the Shapley values and the möbius transformation values of a fuzzy measure. The set function value for the alternative is calculated by averaging the values of the set function representation of randomly generated weights and fuzzy measues when the alternative has the highest comprehensive score. By interpreting the functions, we can understand the feature of an alternative.

1　はじめに

AHP[3] や HFI[5] など加重和やショケ積分で総合評価を行って分析をするとき，ある代替案の総合評価値が 1 位のときの重要度を分析して，その代替案が他の代替案に比べて，どのような特徴があるのかがわかる．

表 1: 数値例 I（2 基準，4 代替案の個別評価値）

代替案	基準 1	基準 2
A1	0.35	0.15
A2	0.05	0.5
A3	0.24	0.34
A4	0.36	0.01

表 1 は 2 基準 4 代替案の例である．基準 1 の重要度のみが高いとき代替案 1 や 4 が 1 位になることが多く，代替案 1,4 は基準 1 の重要度のみが高いときに優れた代替案となる代替案と解釈できる．代替案 3 は基準 1,2 の重要度がともに高いとき 1 位になることが多い．このような関係を集合関数で表現すること提案した．

[9] では，加重和をショケ積分モデルに拡張し，どのような場合，1 位になるのかを，重要度の集合関数とメビウス反転値を用いて表現することを試みた．単純なメビウス反転値の平均値では，要素の個数による出現頻度などに差異などにより，あまり的確には表現できなかった．本稿では，その出現頻度などを補正した値を定義し，より的確に表現できるようにした．

2　集合関数表示による特徴分析 (加重和)

2.1　評価基準，個別評価値，総合評価値

$X=\{1,\dots,n\}$ を評価基準の集合とする．m を代替案の数とし，x^i_j $(i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m)$ を j 番目の代替案の i 番目の基準の個別評価値とする．この x^i_j は，評価基準間で strong commensurability を満している (評価単位が等しい) とする [7].

また，n 個の評価基準の重要度を $\boldsymbol{w}=(w_1,\dots,w_n)$ とする．ただし，$w_i>0, \forall i$ かつ，$\sum_{i=1}^n w_i=1$ とする．

加重和の場合，k 番目の重要度 $\boldsymbol{w}^k$ に対する j 番目の代替案の総合評価値を $y^k_j=\sum_{i=1}^n (w^k_i x^i_j)$ で計算する．

2.2　代替案の特徴を表す集合関数 E

代替案 j の特徴を表す集合関数 E_j を定義する．

$$E_j : 2^X \to \boldsymbol{R}^+,\ E(\emptyset)=0, j=1,\dots,m \qquad (1)$$

たとえば，$n=2$, $X=\{1,2\}$ の場合，E_j は，$E_j(\emptyset)$, $E_j(\{1\})$, $E_j(\{2\})$, $E_j(\{1,2\})$ から構成される．

ここで，$E_j(\{1\})$ は，w_1 のみが高いとき，代替案 j が 1 位になる程度とする．同様に，$E_j(\{2\})$ は，w_2 のみが高いとき，代替案 j が 1 位になる程度とする．また，$E_j(\{1,2\})$ は，w_1（かつ）w_2 が高いとき，代替案 j が 1 位になる程度とする．

2.3　ある重要度を与えたときの集合関数

ある重要度 $\boldsymbol{w}^k$ を与えたとき，E^k を

$$E^k(\{\sigma(1),\dots,\sigma(i)\}) \equiv [w^k_{\sigma(i)} - w^k_{\sigma(i+1)}], \qquad (2)$$

$(i=1,\dots,n)$ とする．ただし，$\sigma(i)$ は，X 上の置換で，$w^k_{\sigma(1)} \geq \dots \geq w^k_{\sigma(n)}$ かつ $X=\{\sigma(1),\dots\sigma(n)\}$ で，$\sigma(n+1)=n+1$, $w_{n+1}=0$ とする．この式 (2) で割り当てられなかった $E^k(A)$ は，$E^k(A)=0$ とする．

2.4　シミュレーションにより集合関数を求める

乱数で $\boldsymbol{w}^k$ を与え E^k を求め，その $\boldsymbol{w}^k$ での総合評価値 1 位の代替案を j とする．規定回（K 回) 繰り返す．

$x^i_j, \forall i,j$ を与え，次の手順で求める．

(1) E^+_j と最大値になった回数 n_j を 0 とする．$E^+_j(A):=0, n_j:=0$

(2) (3) から (6) までのプロセスを k を 1 から K まで変化させて，規定回 (K 回) 繰り返す．

(3) $(0,1)$ の一様乱数で w'^k_i を与え，正規化 ($w^k_i = w'^k_i / \sum_i w'^k_i$) し各総合評価値 y^k_j を求める．

(4) 総合評価値が最も大きい代替案を j とする．j の回数を 1 増やす．$n_j := n_j+1$.

(5) 式 (2) で，E^k を求める．
(6) E^k を E_j^+ に加算する．$E_j^+(A) := E_j^+(A) + E^k(A), \forall A \in 2^X$

この手順において，(4) のプロセスで最大値が 2 つ以上 (q 個) ある場合，$1/q$ ずつ加える．

2.5 特徴を表す集合関数 E

解釈で用いる集合関数の値は，平均 0, 標準偏差 1 に基準化した値を用いる．$E^M(A)$ を $E^k(A), k = 1, \ldots, K$ の平均値，$E^{SD}(A)$ を標準偏差とする ($\forall A$)．1 位になった代替案に割り振られた集合関数の平均値を

$$E_j^W(A) = \frac{(E_j^+(A)/n_j) - E^M(A)}{E^{SD}(A)}, \forall A, j \qquad (3)$$

とし，加重和の場合の特徴を表す集合関数とする．

3 集合関数表示による特徴分析 (ショケ積分)

2 節では，総合評価は加重和にしていた．評価項目間の相互作用を考えるとファジィ測度，ショケ積分モデル [1][4] を利用することが考えられる．ファジィ測度の場合，重要度以外にファジィ測度の非加法性（優加法性や劣加法性）も考慮しなくてはならない．重要度の大きさの部分をシングルトンのファジィ測度の値から 2 節と同様の方法で求め，非加法的な部分の影響をファジィ測度のメビウス反転値から求める．

3.1 ファジィ測度，メビウス反転値，ショケ積分

入出力値の単調性を考慮し，(単調な）ファジィ測度とし，2 節での重要度の和を 1 にすることに対応して，正規性も仮定する．ファジィ測度 μ のメビウス反転値 [6] を Δ^μ とする．ファジィ測度 μ の i 番目の評価基準のシャプレイ値を $sh_i(\mu)$ とする．

3.2 ショケ積分による総合評価

乱数を使って生成したファジィ測度 μ^k を使って，各代替案を総合評価する．$y_j^k = f_{\mu^k}^C(x_j^1, \ldots, x_j^n)$. $f_{\mu^k}^C(x_j^1, \ldots, x_j^n)$ は，$x_j^1, \ldots, x_j^n$ のファジィ測度 μ^k に関するショケ積分値とする．

3.3 代替案の特徴を表す指標

加重和の場合の E と同様に，ショケ積分の場合のファジィ測度から特徴を表す指標を求める．特徴は，重要度の部分と相互作用の部分に分けて指標を作成する．重要度の部分は，ファジィ測度 μ^k のシャプレイ値を使い，相互作用の部分は，μ^k のシングルトンの要素を除くメビウス反転値を利用する．

3.4 重要度の特徴を表す F

ファジィ測度 μ^k のシャプレイ値を重要度とする．$w_i^k = sh_i(\mu^k), \forall i, k$ とし，式 (2) と同様に求める．

$$F^k(\{\sigma(1), \ldots, \sigma(i)\}) \equiv [w_{\sigma(i)}^k - w_{\sigma(i+1)}^k], \qquad (4)$$

2.4 節と同様な方法でシミュレーションを行い，

$$F_j^C(A) = \frac{(F_j^+(A)/n_j) - F^M(A)}{F^{SD}(A)}, \forall A, j \qquad (5)$$

とする（$F^M(A)$ は平均，$F^{SD}(A)$ は標準偏差）．

3.5 相互作用を表す M

相互作用を表す指標 M は，メビウス反転値 Δ^μ のシングルトンの値を除いた部分とする．

$$M^k(A) \equiv \begin{cases} 0 & \text{if } |A| \leq 1 \\ \Delta^{\mu^k}(A) & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (6)$$

シミュレーションでは，2.4 節と同様に，(6) で，代替案 j が 1 位のとき，$M_j^+(A)$ に加算していく．代替案の特徴を表す集合関数を次式で定義する．

$$M_j^C(A) = \frac{(M_j^+(A)/n_j) - M^M(A)}{M^{SD}(A)}, \forall A, j \qquad (7)$$

3.6 ファジィ測度 μ^k の生成

シミュレーションに利用するファジィ測度 μ^k は，ある集合 A が相互作用を持ったときに，どのように，代替案間に影響があるのか調べるため，加法的な関係を基本とし，その A のすべての部分集合でのみ非加法性を与える．本稿の目的は，乱数でファジィ測度を生成することでなく，要素間の相互作用が 1 位になることがどのように影響するか？，すなわち，代替案の相対的な性質を見ることである．

3.7 部分的 λ ファジィ測度

集合 X の部分集合 B 内のみに λ ファジィ測度の関係があるファジィ測度を部分的 λ ファジィ測度と呼ぶ．

集合 X に対して，X の部分集合 $B \subseteq X, |B| \geq 2$ と $\lambda > -1$ を与え，次の関係を満たすとき部分的 λ ファジィ測度と呼ぶ．部分的 λ ファジィ測度は，C_1 が B の部分集合 ($C_1 \subseteq B$) の場合，$C_1 = C_2 \cup C_3, C_2 \cap C_3 = \emptyset$ として，

$$\mu(C_1) = \mu(C_2) + \mu(C_3) + \lambda\mu(C_2)\mu(C_3) \qquad (8)$$

と構成し，$C_1 \cap B \neq \emptyset$ の場合，$C_2 = C_1 \cap B, C_3 = C_1 \setminus C_2$ とし，$C_1 \cap B = \emptyset$ の場合，$C_1 = C_2 \cup C_3, C_2 \cap C_3 = \emptyset$ として，次式で構成する．

$$\mu(C_1) = \mu(C_2) + \mu(C_3) \qquad (9)$$

3.8 部分的 λ ファジィ測度の生成

集合 $B \subseteq X, |B| \geq 2$ を与え，乱数でシングルトンファジィ測度の比率と λ を設定し，次の手順で部分的 λ ファジィ測度を求める．

1. 一様乱数で，シングルトンファジィ測度の比率 $w_1^k : \ldots : w_n^k$ ($w_i^k \in [0,1]$) と ϕ_s 変換 [2][8] の $\xi^k \in (0,1)$ を与え，$\lambda^k = (\frac{1}{\xi^k} - 1)^2 - 1$ とする．
2. $\alpha > 0$ を適当に定める．
3. シングルトンのファジィ測度の値を $\mu^k(\{i\}) = \alpha w_i^k$ とし，3.7 節の方法でファジィ測度を生成する．
   - $\mu^k(A) > 1$ が出現したら α を小さくする．
   - $\mu^k(X) < 1$ となったら α を大きくする．
4. $\mu^k(X) = 1$ となるように，α を調整する．

4 数値例 I

図 1 は，表 1 の $E_j^W(A)$ のグラフである．A1 と A4 は，基準 1 の重要度が高いとき選択されることを示しており．特に A4 ではその傾向が強い．A3 は，基準 1,2 の重要度がともに高いとき（等重みに近いとき）選択されることを示している．

図 2 は $F_j^C(A)$ のグラフであり，ほぼ図 1 に近いものである．図 3 は，$M_j^C(A)$ のグラフであり，A3 の $M_3^C(\{1,2\})$ が正になっている．これは，2 つの入力に対して優加法性が高いとき選択されることを示している．A2 と A4 の $M^C(\{1,2\})$ は負になっており，劣加法的な場合に選択される．A2 は基準 2 のみ，A2 は基準 1 のみの場合である．A1 の $M^C(\{1,2\})$ はほぼ 0 である．これは，A4 に対しては優加法的，A3 に対しては劣加法的であることが有利であるからである．

5 数値例 II

表 2 は数値例 II で，表 3 はその $E_j^W(A)$，$F_j^C(A)$，$M_j^C(A)$ の値であり，図 4 は $M_j^C(A)$ のグラフである．

表 2: 数値例 II（4 基準，5 代替案の個別評価値）

代替案	基準 1	基準 2	基準 3	基準 4
B1	0.18	0.10	0.20	0.12
B2	0.44	0.01	0.04	0.03
B3	0.01	0.40	0.45	0.05
B4	0.35	0.05	0.11	0.50
B5	0.02	0.44	0.20	0.30

B1 は，加重和の場合,1 回も 1 にはならず，どのような重要度を与えても 1 位になることは無かったことを示している．しかし，ショケ積分の場合，選択される場合が出現し，それは，$M_1^C(A)$ が正（優加法的）であるときに出現する．これは，特に悪い評価値が無いことを示している．特に，$M_1^C(\{1,2\}), M_1^C(\{1,2,3\})$ が大きく，基準 1,2 の両方をともに高いときに選択されることを示している．$M_j^C(\{3,4\})$ をみると B5 では正，B3 では負である．これは，基準 3,4 で，B3 と B5 の個別評価値の和が 0.5 と同じであるのに対して，B5 は差が小さく，B3 は差が大きいことに由来する．

6 おわりに

1 位になるとき，すなわち，代替案間の相対的な関係に基づいて，代替案の特徴を集合関数で表現した．ファジィ測度の生成法などは検討の余地がある．

数値例 I,II とも $M^k(A)$ に平均値が 1 ではない．$M_j^+(A)$ の値が正でも，式 (7) のように正規化するので負になることがある（逆もありうる）．$M^M(A) = 0, \forall A$ となるようなファジィ測度の生成は難しい．とくに，ファジィ測度の単調性との関係で，$M^M(A) = 0$ としようとすると，よくファジィ測度の単調性を満たさなくなる．

参考文献

[1] M. Choquet: Theory of Capacities, Annales de l'Institut Fourier 5, 131-295, 1954.

[2] Y.Tukamoto, A Measure Theoretic Approach to Evaluation of Fuzzy Set Defined on Probability Space, *Journal of Fuzzy Math*(模糊数学), 2, 3, 89-98, 1982.

[3] Saaty, T. L.: The Analytic Hierarchy Process, McGraw-Hill (1980).

[4] T. Murofushi: A Theory of fuzzy measure : representation, the Choquet integral and null sets, J. Math. Anal. Appl., 159, pp.532-549,1991

[5] 杉山孝夫, 椎塚久雄: 階層的ファジィ積分による意思決定法, **日本ファジィ学会誌**,Vol.5, No.4, 772-782, 1993.

[6] 藤本勝成: 意思決定とメビウス反転, 日本ファジィ学会誌, 10, 2, 206 − 214, 1998.

[7] 高萩栄一郎，室伏俊明: ファジィ測度の同定について, 第 5 回インテリジェント・システム・シンポジウム (FAN Symposium '95) 講演論文集（日本ファジィ学会）, 463-468, 1998.

[8] 高萩栄一郎: 重要度と λ による λ ファジィ測度の同定について, 日本ファジィ学会誌, 12, 5, 665-676, 2000.

[9] 高萩栄一郎: 代替案の相対的な特徴分析 – 加重和とショケ積分の場合 –, 第 17 回 曖昧な気持ちに挑むワークショップ講演論文集（日本知能情報ファジィ学会）, 49-54, 2012.

連絡先

高萩栄一郎 (専修大学商学部)

E-mail：takahagi@isc.senshu-u.ac.jp