集計オペレータとしての
ファジィ測度-ショケ積分モデル
Fuzzy Measure Choquet Integral Model
as an Aggregation Operator

高萩栄一郎*
Eiichiro TAKAHAGI

概要：ϕ_s 変換でファジィ測度を割り当て，ショケ積分で集計すると，パラメータ ξ により，最大値，平均値，最小値の中間の集計ができる．そこで，ϕ_s 変換によるショケ積分モデルを広義の平均値，集計オペレータと考え，その性質を検討し，本集計オペレータが，ベキ等律，単調性，一般化交換律，一般化ド・モルガン律，一般化クリーネ律，１次同次性等が成り立つことを明らかにした．

キーワード:ファジィ測度, ショケ積分, 集計オペレータ, ド・モルガン律，クリーネ律，単調性，１次同次性

1　はじめに

ファジィ測度ショケ積分モデルは，最大値と最小値の中間に位置する集計オペレータ (Aggregation Operator) であることが知られており，その集計オペレータとしての性質は，Grabisch[3] などにより研究された．また，一般の集計関数，ファジィオペレータとしての性質では，Dubois ら [1],Yager[6],[7] などにより研究されており，交換律，連続性，単調性などが検討された．また，平均値としての研究は柳井 [12][13] により研究されており,「平均値の一般的定義」として，連続性，最大値と最小値の中間のオペレータであること，非減少関数で停留点がないこと（狭義単調増加関数），１次同次であることを挙げている．一方，ϕ_s 変換を使って，ファジィ測度を割り当てたファジィ測度ショケ積分モデルは，図 1 のように，パラメータ ξ を変化させることにより，最大値，平均値，最小値およびその中間の評価が可能であることを示した [8][9].

本研究の目的は，ϕ_s 変換型で割り当てたファジィ測度ショケ積分モデルが，前記のファジィオペレータや平均値の一般的な定義を満たすかどうか検討し, その性質を明らかにすることにある.

表 2 に示すように，ϕ_s 変換型のファジィ測度によるショケ積分モデルは，少ないパラメータ数で相互作用や評価項目の重みを表現できるうえ，狭義の単調増加性，一般化ド・モルガン律など多くの有用な性質をもっている.

* 専修大学 (Senshu University)

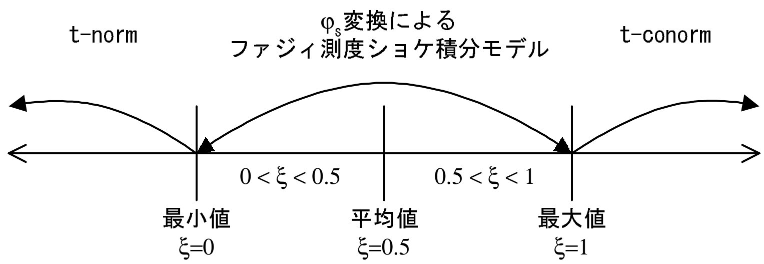

図 1: ξ と集計方法

2　ファジィ測度-ショケ積分モデル

n 個の入力項目の集合を $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし，入力値（集計される値）を，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ として，集計関数 $U(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ で，出力値を計算する．以下，この集計関数にファジィ測度ショケ積分モデルを使い，その性質を分析する．

2.1　正規なファジィ測度ショケ積分モデル

正規なファジィ測度は,

$$\mu : X \to [0, 1] \tag{1}$$

$$\forall A, B \subset X \text{ に対して，もし } A \supset B \text{ ならば} \mu(A) \geq \mu(B) \text{(ファジィ測度の単調性)} \tag{2}$$

$$\mu(\emptyset) = 0 \tag{3}$$

$$\mu(X) = 1 \text{(正規性)} \tag{4}$$

で定義され，ショケ積分は,

$$U_\mu(a_1, \ldots, a_n) \equiv \text{(C)} \int h d\mu \equiv \int_0^{+\infty} \mu(\{x \mid h(x) \geq \alpha\}) d\alpha + \int_{-\infty}^{0} [\mu(\{x \mid h(x) \geq \alpha\}) - \mu(X)] d\alpha, \;\; h(i) = a_i, i = 1, \ldots, n \tag{5}$$

で定義される．式 (4) は，ファジィ測度の正規性を表しており，正規性は，一般のファジィ測度では仮定されないが，本稿では仮定するものとする．

例えば，$n = 3, a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq 0$ の場合,

$$\begin{aligned} U_\mu(a_1, a_2, a_3) &= \text{(C)} \int h d\mu \\ &= (a_1 - a_2)\mu(\{1\}) + (a_2 - a_3)\mu(\{1, 2\}) + a_3 \mu(\{1, 2, 3\}) \end{aligned} \tag{6}$$

となる．表 1 のように，ファジィ測度の割当方法により，最大値，平均値，最小値の集計が可能である ($\mid A \mid$ は，集合 A の要素の数).

ファジィ測度 $\mu(A)$ の値が，集合 A の要素数のみで決まるとき，すなわち,

$$\mid A \mid = \mid B \mid \text{ ならば} \mu(A) = \mu(B) \tag{7}$$

表 1: ファジィ測度と集計方法

ファジィ測度の割当方法	集計方法
$\mu(A) = 1, \forall A \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$	最大値 (max)
$\mu(A) = \frac{\lvert A \rvert}{n}, \forall A \in 2^X$	平均値 (average)
$\mu(A) = 0, \forall A \in 2^X \setminus \{X\}$	最小値 (min)

という性質を持つとき，等ウエイトのファジィ測度と呼ぶ．すなわち，A の要素の中身を問わず，要素の数により決まるファジィ測度を言う．

2 つの正規なファジィ測度 μ と μ^* が

$$\mu^*(A) = 1 - \mu(X \setminus A), \forall A \in 2^X \tag{8}$$

という関係にあるとき，共役なファジィ測度という．

2.2 ϕ_s 変換によるファジィ測度の割り当て

§2.1 で，ファジィ測度の割り当て方によりファジィ測度ショケ積分モデルで，最大値，最小値，平均値をもとめる集計関数を定義することができると述べた．ϕ_s 変換を使うことにより，これらの中間の評価を行うことができる [10]．ϕ_s 変換は，

$$\phi_s : [0,1] \quad \rightarrow \quad [0,1],\ s \in [0, +\infty] \tag{9}$$

$$\phi_s(u) \quad = \quad \begin{cases} [u] & \text{if } s = 0 \\ u & \text{if } s = 1 \\ 1 - [1-u] & \text{if } s = +\infty \\ (s^u - 1)/(s-1) & \text{otherwise} \end{cases} \tag{10}$$

$$\text{where} \qquad [u] = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 < u \leq 1 \\ 0 & \text{if } u = 0 \end{cases}$$

$$s \quad = \quad ((1/\xi) - 1)^2 \tag{11}$$

で定義される．ϕ_s 変換の形状を図 2 に示す．図 2 からも明らかであるが，ϕ_s 変換は，

u に関する狭義単調増加性

$$\xi \in (0,1) \text{ を固定したとき}, u_1 > u_2 \text{ならば}, \phi_s(u_1) > \phi_s(u_1) \tag{12}$$

u の連続性 任意に固定した s または ξ に対して，$\phi_s(u)$ は，連続である．

s および ξ に関する狭義単調性 $u \in (0,1)$ を任意に固定したとき，

$$s_1 < s_2 \text{ならば}, \phi_{s_1}(u) > \phi_{s_2}(u) \tag{13}$$

$$\xi_1 > \xi_2 \text{ならば}, \phi_{s_1}(u) > \phi_{s_2}(u) \tag{14}$$

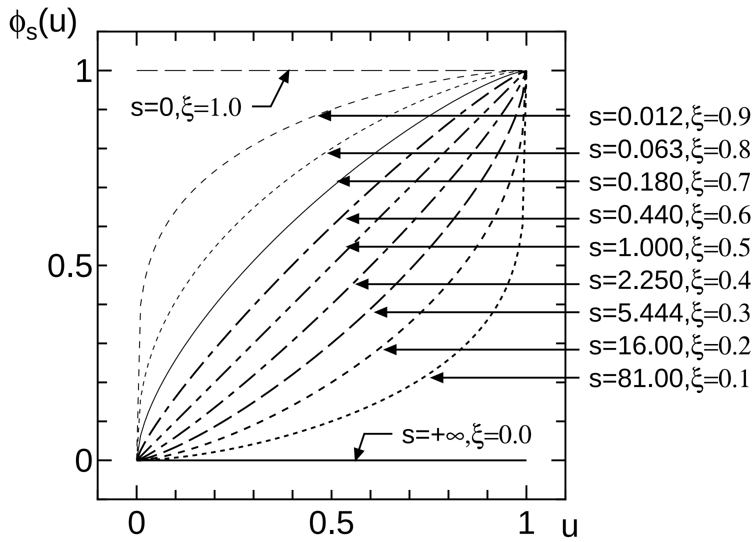

図 2: ϕ_s 変換の形状

s または ξ の連続性 任意に u を固定したとき，$\phi_s(u)$ は，s および ξ に対して連続が成り立つ [9].

ϕ_s 変換を使ってのファジィ測度の割り当ては，ウエイト $w_1,\dots,w_n, w_i \geq 0, \forall i$ と $\xi \in [0,1]$ により，

$$\mu(A) = \phi_s\left(\frac{\sum_{i\in A} w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}\right), \forall A \in 2^X \tag{15}$$

で定義する．このとき，ξ を変化させると，ϕ_s 変換の ξ による単調性，により，最大値と最小値の中間の評価ができる．図 3 は，最小値，平均値，最大値の変化の様子である．$U_\xi(a_1,a_2,a_3)$ は，§5.1 で述べるように，等ウエイトで式 (15) を適用したファジィ測度で集計したもので，ξ を変化させたものである．

λ ファジィ測度は，菅野 [4] により，提案されて以来，ファジィ測度の応用でさかんに使われている．λ ファジィ測度と ϕ_s 変換の関係は，ϕ_s 変換で割り当てられたファジィ測度は，λ ファジィ測度の条件を満たしていることにある．すなわち，$\lambda = s-1$ とすれば，

$$\mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B) + \lambda\mu(A)\mu(B), \xi \in [0,1] \tag{16}$$

である．

また，ξ と $1-\xi$ で割り当てたファジィ測度は，共役なファジィ測度になっている．$s_1 = ((1/\xi)-1)^2$,$s_2 = ((1/(1-\xi))-1)^2$ とし，ϕ_{s_1} と ϕ_{s_2} が共役な関係

$$\phi_{s_1}(u) = 1 - \phi_{s_2}(1-u) \ \ , \forall \xi, u \in [0,1] \tag{17}$$

にあることを示す.

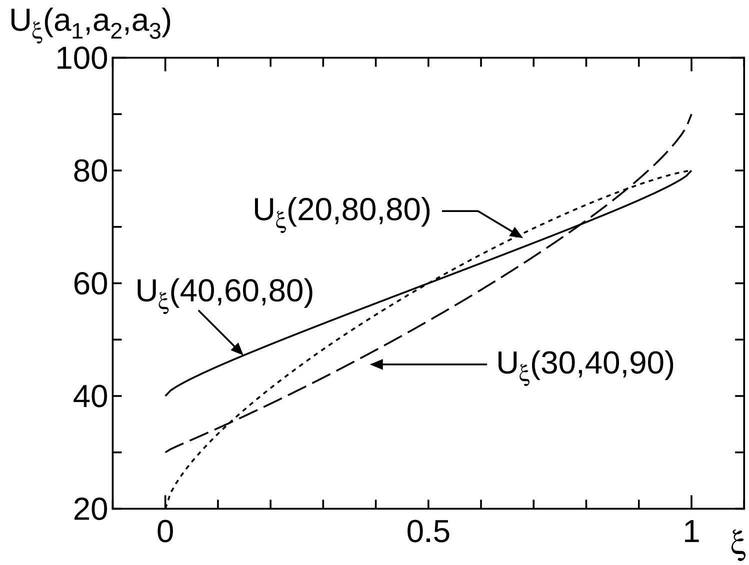

図 3: ξ を変化させたときの出力値の変化

$\xi = 1$ **の場合** $s_1 = 0, s_2 = +\infty$ より $u \neq 0$ ならば，$\phi_{s_1}(u) = 1, \phi_{s_2}(1-u) = 0$ より，$\phi_{s_1}(u) + \phi_{s_2}(1-u) = 1$. また，$u = 0$ ならば，$\phi_{s_1}(u) = 0, \phi_{s_2}(1-u) = 1$ より，$\phi_{s_1}(u)+\phi_{s_2}(1-u) = 1$.

$\xi = 0$ **の場合** $\xi = 1$ の場合と同様に証明可能

$\xi = 0.5$ **の場合** $s_1 = s_2 = 1$ より，$\phi_{s_1}(u) = u, \phi_{s_2}(1-u) = 1-u$. よって，$\phi_{s_1}(u)+\phi_{s_2}(1-u) = 1$.

$\xi \in (0, 0.5) \cup (0.5, 1)$ **の場合**

$$
\begin{aligned}
\phi_{s_1}(u) + \phi_{s_2}(1-u) &= \frac{s_1^u - 1}{s_1 - 1} + \frac{s_2^{1-u} - 1}{s_2 - 1} \\
&= \frac{s_1^{u-1}(s_1 s_2) - s_1^u - s_2 + s_2^{-u}(s_1 s_2) - s_2^{1^u} - s_1 + 2}{s_1 s_2 - s_1 - s_2 + 1} \\
&\quad (s_1 s_2 = 1, s_1^{u-1} - s_2^{1-u} = 0, s_1^u - s_2^{-u} = 0 \text{ より}) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

(証明終)

したがって，任意の $A \in 2^X$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\mu_\xi(A) = \quad \phi_{s_1}\left(\frac{\sum_{i\in A} w_i}{\sum w_i}\right) &= \quad 1 - \phi_{s_2}\left(1 - \frac{\sum_{i\in A} w_i}{\sum w_i}\right) \\
= \quad 1 - \phi_{s_2}\left(\frac{\sum_{i\notin A} w_i}{\sum w_i}\right) &= \quad 1 - \mu_{1-\xi}(X \setminus A)
\end{aligned}
$$

となり，μ_ξ と $\mu_{1-\xi}$ は，共役なファジィ測度となる．

2.3　OWA オペレータ

OWA オペレータは，Yager[5] により提案された a_i の順位により，ウエイトを変える集計関数である．b_i を入力値 $a_i, i = 1, \ldots, n$ のなかで，i 番目に大きい値とする（同順位の場合は任意）．また，i 番目に大きい入力値へのウエイトを w_i とした場合 ($w_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$)

$$U_{\mathrm{OWA}}^{(w_1,\ldots,w_n)}(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i b_i \tag{18}$$

で計算する．例えば，$n = 3$ で，$w_1 = 0.5, w_2 = 0.3, w_3 = 0.2$ で，$a_1 = 50, a_2 = 30, a_3 = 60$ の場合,

$$U_{\mathrm{OWA}}^{(0.5,0.3,0.2)} = 0.5 \times 60 + 0.3 \times 50 + 0.2 \times 30 = 51 \tag{19}$$

となる．OWA オペレータは,

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{|A|} w_i, \forall A \in 2^X \tag{20}$$

のようにファジィ測度を割り当てれれば，ファジィ測度ショケ積分モデルにより表現できることが知られている．式 (20) により割り当てられたファジィ測度は，明らかに，ファジィ測度の単調性を満たしている．

3　一般の正規なファジィ測度の場合

一般の正規なファジィ測度で成立する性質を検討する．本節で成立する性質は，次節以降で述べる ϕ_s 変換型のファジィ測度や OWA 型のファジィ測度でも成立する．

3.1　正規なファジィ測度全般に成立する性質

正規なファジィ測度 μ を使った場合，次の 7 つ性質が成立することが知られており ([3] など), 容易に導くことができる．

ベキ等律 $U_\mu(a, \ldots, a) = a$

単調性 $a \leq a', b \leq b'$ ならば $U_\mu(a, b) \leq U_\mu(a', b')$

アフィン変換 $\alpha > 0$ ならば,

$$\alpha U_\mu(a_1, \ldots, a_n) + \beta = U_\mu(\alpha a_1 + \beta, \ldots, \alpha a_n + \beta) \tag{21}$$

となる．

一次同次 $\alpha > 0$ ならば,

$$\alpha U_\mu(a_1, \ldots, a_n) = U_\mu(\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n) \tag{22}$$

となる．この性質は，$\beta = 0$ の時のアフィン変換である．

最大値と最小値の中間

$$\min(a_1, \ldots, a_n) \le U_\mu(a_1, \ldots, a_n) \le \max(a_1, \ldots, a_n) \tag{23}$$

連続性 $a_1, \ldots, a_n$ に対して，$U_\mu(a_1, \ldots, a_n)$ は，連続である．

2 つのファジィ測度間の単調性 2 つのファジィ測度 μ_1, μ_2 について，

$$\mu_1(A) \ge \mu_2(A), \forall A \in 2^X \text{ならば} U_{\mu_1}(a_1, \ldots, a_n) \ge U_{\mu_2}(a_1, \ldots, a_n) \tag{24}$$

である．

3.2 特殊なファジィ測度が満たす性質

また，ファジィ測度に条件を付けた場合，以下の性質が成り立つ．

狭義の単調増加性 もし，ファジィ測度 μ が，

$$A \subset B (A \subseteq B \text{ かつ } A \ne B) \text{ ならば} \mu(A) < \mu(B) \tag{25}$$

という性質（ファジィ測度の狭義の単調増加性）を満たしていれば，入力値と出力値との間に狭義の単調増加性

$$(\forall i, a_i \ge b_i) \text{ かつ } (\exists i, a_i > b_i) \text{ ならば } U_\mu(a_1, \ldots, a_n) > U_\mu(b_1, \ldots, b_n) \tag{26}$$

を満たすことも知られている．

一般化ド・モルガン律 一般化ド・モルガン律を

$$U_{\mu_1}(a_1, \ldots, a_n) = 1 - U_{\mu_2}(1 - a_1, \ldots, 1 - a_n) \tag{27}$$

で定義する．もし，μ_1 と μ_2 が共役なファジィ測度であれば，一般化ド・モルガン律を満たす．この性質は，ショケ積分の定義より容易に導くことができる．

クリーネ律 ファジィ論理では，相補律 $A\vee \sim A = 1, B\wedge \sim B = 0$ は，一般に成り立たないので，その条件を弱めたものとしてクリーネ律 $A\vee \sim A \ge B\wedge \sim B$ を議論している [11]．本稿でも，クリーネ律を，$\vee$ を U_{μ_1} に対応させ，$\wedge$ を U_{μ_2} に対応させたとき，任意の $a, b \in [0, 1]$ で

$$U_{\mu_1}(a, 1 - a) \ge U_{\mu_2}(b, 1 - b) \tag{28}$$

が成り立つことと定義する．

$$\mu_1(\{1\}) \ge 0.5, \mu_1(\{2\}) \ge 0.5 \text{ かつ} \mu_2(\{1\}) \le 0.5, \mu_2(\{2\}) \le 0.5 \tag{29}$$

が成り立てば，U_{μ_1}, U_{μ_2} の組は，クリーネ律を満たす．さらに，n 項目に拡張して，一般化クリーネ律を，任意の $\sum a_i = 1, \sum b_i = 1, a_i, b_i \ge 0$ となる $a_i, b_i, i = 1, \ldots, n$ に対して，

$$U_{\mu_1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \ge U_{\mu_2}(b_1, b_2, \ldots, b_n) \tag{30}$$

が成り立つことと定義する．このとき，

$$\mu_1(A) \geq \frac{\mid A \mid}{n}, \mu_2(A) \leq \frac{\mid A \mid}{n}, \forall A \in 2^X \tag{31}$$

が成り立てば，一般化クリーネ律は成り立つ．

なぜなら，$\mu_3(A) = \frac{|A|}{n}, \forall A \in 2^X$ ならば，単純平均，$U_{\mu_3}(a_1, \ldots, a_n) = 1/n$ となり，$\mu_1(A) \geq \mu_3(A) \geq \mu_2(A), \forall A \in X$ なので，2 つのファジィ測度間の単調性より，一般化クリーネ律は成り立つ．

4 等ウエイト 2 項演算子

本節では，2 入力で，等ウエイトの場合を考える．

$$U_\xi(a,b) = (\mathrm{C}) \int h d\mu, h(1) = a, h(2) = b,$$

$$\mu(\{1\}) = \mu(\{2\}) = \phi_s(\frac{1}{2}), s = (\frac{1}{\xi} - 1)^2$$

この場合，次のような単純な計算式になる．

$$U_\xi(a,b) = \xi\{\max(a,b) - \min(a,b)\} + \min(a,b)\ ,\ a, b \in [0,1], \xi \in [0,1] \tag{32}$$

この演算子が $\forall a, b, c, \xi \in [0,1]$ で下記の性質が成り立つ．否定は，$\sim a = 1 - a$ とする．

ベキ等律 $U_\xi(a,a) = a$

交換律 $U_\xi(a,b) = U_\xi(b,a)$

単調性 $a \leq a', b \leq b'$ならば $U_\xi(a,b) \leq U_\xi(a',b')$

狭義の単調増加性 $\xi \in (0,1)$ で $(a \leq a', b < b')$ または $(a < a', b \leq b')$ ならば $U_\xi(a,b) < U_\xi(a',b')$

アフィン変換（１次同次性） $\alpha U_\xi(a,b) + \beta = U_\xi(\alpha a + \beta, \alpha b + \beta)$

ド・モルガン律 $1 - U_{1-\xi}(a,b) = U_\xi(1-a, 1-b)$

ξ に関する単調性 ξ に関する単調性

$$\xi_1 \geq \xi_2 \text{ならば} U_{\xi_1}(a,b) \geq U_{\xi_2}(a,b) \tag{33}$$

を満たす．この性質は，ϕ_s 変換の s に関する狭義の単調減少性 (ξ に関する狭義の単調増加性) および 2 つのファジィ測度間の単調性より成り立つ．

クリーネ律 $1 \geq \xi \geq 0.5$ として，$\vee$ を U_ξ に対応させ，$\wedge$ を $U_{1-\xi}$ に対応させれば，任意の $a, b \in [0,1]$ で

$$U_\xi(a, 1-a) \geq 0.5 \geq U_{1-\xi}(b, 1-b) \tag{34}$$

が成り立つ．

結合律 ($U_\xi(a, U_\xi(b,c)) = U_\xi(U_\xi(a,b),c)$)，吸収律 ($U_{1-\xi}(a, U_\xi(a,b)) = a$) は，一般には成り立たない．また，最小元，最大元は存在しない．分配律 ($U_\xi(a, U_{1-\xi}(b,c)) = U_{1-\xi}(U_\xi(a,b), U_\xi(a,c))$) も一般には成立しない．しかし，分配律は以下の場合で成立する．

$$(a \geq b \text{ かつ } a \geq c \text{ となる } a,b,c) \text{ または } (a \leq b \text{ かつ } a \leq c \text{ となる } a,b,c) \text{ ならば,}$$
$$U_\xi(a, U_{1-\xi}(b,c)) = U_{1-\xi}(U_\xi(a,b), U_\xi(a,c)) \tag{35}$$

ϕ_s 変換は，$s \to \infty (\xi = 0)$ のとき，$\phi_s(u) = 0, \forall u \in (0,1)$, また，$s = 0(\xi = 1)$ のとき，$\phi_s(u) = 1, \forall u \in (0,1)$ であり，$u \in (0,1)$ を固定したとき，$\phi_s(u)$ は，s に関して単調減少な連続関数 (ξ に関して単調増加な連続関数) であるので，2 項演算の場合，任意の等ウエイトファジィ積分型の集計オペレータを作成することができる．

次に，Dubois ら [1] によると，平均化オペレータ ($\diamondsuit$) の条件として，

M1 $\min(x,y) \leq x \diamondsuit y \leq \max(x,y); \diamondsuit \notin \{\min, \max\}$

M2 $\diamondsuit$ は，交換律を満たす

M3 $\diamondsuit$ は，連続かつ単調増加

をあげている．$U_\xi(a,b)$ は，明らかにこれらの条件を満たしている．平均化オペレータは，一般に結合律を満たさないので，Dubois ら [1] は，条件を弱め，bisymmery をあげている．

M4 $(x \diamondsuit y) \diamondsuit (z \diamondsuit t) = (x \diamondsuit z) \diamondsuit (y \diamondsuit t)$

bisymmery は，分配律と同様に，一部の場合のみで成り立つ．

$$\begin{aligned}(z \geq x \geq y \text{ かつ } z \geq t \geq y) \text{ または } (x \geq z \geq y \text{ かつ } x \geq y \geq t) \text{ または}\\ (y \geq x \geq z \text{ かつ } y \geq t \geq z) \text{ または } (t \geq z \geq x \text{ かつ } t \geq y \geq x) \text{ または}\\ (z = y) \text{ または } (y = t) \text{ ならば}\\ U_\xi(U_\xi(x,y), U_\xi(z,t)) = U_\xi(U_\xi(x,z), U_\xi(x,t))\end{aligned} \tag{36}$$

5　等ウエイトの多項演算子

5.1　入力の変量の数が一定の場合 (ϕ_s 変換型)

$$U_\xi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\mathrm{C}) \int h d\mu,\ h(i) = a_i, s = (\frac{1}{\xi} - 1)^2, \mu(A) = \phi_s(\frac{|A|}{n}) \tag{37}$$

Yager[6] が示した n 入力のオペレータ $M : [0,1]^n \to [0,1]$ が平均化オペレータであるための条件は，

ベキ等律 $M(a, \ldots, a) = a$

単調性 M は，各変数に対して単調増加

一般化交換律 変数の順番に無関係

である．等ウエイトの ϕ_s 変換型ファジィ測度による多項演算子は，ベキ等律，単調性，連続性，一般化交換律，アフィン変換（１次同次性），連続性を満たす．また，$\xi \in (0,1)$ であれば，狭義の単調増加性も成り立つ．また，U_ξ と $U_{1-\xi}$ の間で，一般化ド・モルガン律，一般化クリーネ律，ξ に関する単調増加性が成り立つ．

5.2　入力の変量の数が可変の場合 (ϕ_s 変換型)

Yager [6],[7] は，多入力の集計オペレータを下記のような bag オペレータとして定義し，平均化オペレータの条件をあげている．

bag(multi-set) とは，集合 X の重複を許す要素の集まりである．集合と同様に要素の順番は意味は持たない．a, b, c, b からなる bag A を $A = \langle a, b, c, b \rangle$ とかく．また，$B = \langle a, c, g, h \rangle$ との和 D は，$D = A \oplus B = \langle a, b, c, b, a, c, g, h \rangle$ となる [7]．R^I を bag$I$ の集合とし，関数 F を $F : R^I \to I, I = [0,1]$ としたとき，F を I から I への bag オペレータと呼ぶ [7]．

本モデルのオペレータ U_ξ は，一般化交換律を満たしているので，bap オペレータとして扱うことができる．ϕ_s 変換型のファジィ測度ショケ積分モデルを bag オペレータの形にすると，

$$V_\xi(\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle) \equiv (\mathrm{C}) \int h d\mu. \tag{38}$$

$$h(i) = a_i, s = (\frac{1}{\xi} - 1)^2, \mu(A) = \phi_s(\frac{\mid A \mid}{n}), \forall A \in 2^X$$

となる．そして，同様に，ベキ等律，連続性，一般化交換律，アフィン変換（１次同次性）単調性，ξ に関する単調性，一般化ド・モルガン律を満たす．また，$\xi \in (0,1)$ であれば，狭義の単調増加性をも満たす.

Yager[7] は，bap オペレータ M が平均化オペレータである条件として次の 2 つをあげている．

(1) M は，各変数に対して，単調増加

(2) $D = A \oplus B$ としたとき，

- **(a)** $M(D) \geq M(A)$ if $M(B) \geq M(A)$
- **(b)** $M(D) \leq M(A)$ if $M(B) \leq M(A)$

V_ξ は，この平均化オペレータとしての条件を下記の反例のように (2) の条件を満たさない．

$$A = \langle 5, 2, 8 \rangle, B = \langle 5, 6, 1, 8 \rangle, \xi = 0.75$$
$$V_\xi(A) = 6.347, V_\xi(B) = 6.335, V_\xi(A \oplus B) = 6.362$$

5.3　一般の等ウエイトの場合 (OWA オペレータ型)

一般の等ウエイトの場合，すなわち，式 (7) を満たすとき，ファジィ測度ショケ積分モデルは，

$$w_i = \mu(\{1, \ldots, i\}) - \mu(\{1, \ldots, i - i\}) \tag{39}$$

で OWA オペレータのウエイトを割り当てれば，OWA オペレータで表現できる．

OWA オペレータは，順位に対するウエイトであり，評価項目へのウエイトではないので，等重みの集計関数である．ベキ等律，一般化交換律，連続性，単調性，アフィン変換（１次同次性）が成り立つ．また，OWA オペレータのウエイトが $w_i \neq w_j, \forall i, j$ という性質を持つならば，式 (20) により割り当てられたファジィ測度は，式 (25) の条件を満たすので，狭義の単調増加関数である．

6　多項演算子（ウエイト付き）

6.1　入力の変量の数が一定の場合

本節では，入力値へのウエイトも含めた，多入力のオペレータとして扱う．変量の数 n とそのウエイト $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, (\omega_i \geq 0, \forall i)$ を固定して考える．ウエイトをオペレータの肩字で表す．

$$U_\xi^{(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \equiv (\mathrm{C}) \int h d\mu \tag{40}$$
$$h(i) = a_i, s = (\frac{1}{\xi} - 1)^2, \mu(A) = \phi_s(\frac{\sum_{i\in A}\omega_i}{\sum_{i\in X}\omega_i}), \forall A \in 2^X$$

ベキ等律，連続性，単調性，ξ に関する単調性，一般化ド・モルガン律，アフィン変換（１次同次性）を満たす．各入力値にウエイトを与えているので一般化交換律は満たさない．また，$\xi \in (0,1)$ かつ $\omega_i > 0, \forall i$ であれば，狭義単調増加関数である．

6.2　入力の変量の数が可変の場合

§5.2 と同様に，bag mapping を使う．ここでは，ウエイトと入力値の組の bag から，I への bag オペレータとして扱うことができる．すなわち，

$$V_\xi : R^{I\times I} \to I \tag{41}$$

$$V_\xi(\langle(\omega_1, a_1), \ldots, (\omega_n, a_n)\rangle) \equiv (\mathrm{C}) \int h d\mu, \tag{42}$$
$$h(i) = a_i, s = (\frac{1}{\xi} - 1)^2, \mu(A) = \phi_s(\frac{\sum_{i\in A}\omega_i}{\sum_{i\in X}\omega_i})$$

とする．

この場合，ベキ等律，ξ に関する単調性，一般化交換律を満たす．また，a_i に限れば，連続性，単調性

$$a_i \geq b_i, \forall i \text{ ならば } V_\xi(\langle(\omega_1, a_1), \ldots, (\omega_n, a_n)\rangle) \geq V_\xi(\langle(\omega_1, b_1), \ldots, (\omega_n, b_n)\rangle) \tag{43}$$

一般化ド・モルガン律

$$1 - V_\xi(\langle(\omega_1, a_1), \ldots, (\omega_n, a_n)\rangle) = V_{1-\xi}(\langle(\omega_1, 1 - a_1), \ldots, (\omega_n, 1 - a_n)\rangle) \tag{44}$$

アフィン変換（１次同次性）は，成り立ち，$\xi \in (0,1)$ かつ $\omega_i > 0, \forall i$ であれば，狭義単調増加性を満たす．

ウエイトは，すべて定数倍してもよい．$\alpha > 0$ に対して，

$$V_\xi(\langle(\omega_1, a_1), \ldots, (\omega_n, a_n)\rangle) = V_\xi(\langle(\alpha\omega_1, a_1), \ldots, (\alpha\omega_n, a_n)\rangle) \tag{45}$$

となる．次にショケ積分の性質から，$a_1 = a_2$ ならば

$$\begin{aligned} & V_\xi(\langle(\omega_1, a_1), (\omega_2, a_2), (\omega_3, a_3), \ldots, (\omega_n, a_n)\rangle) \\ & (u_i = \omega_1 / \sum \omega_i \text{とすると}) \\ = & \ \phi_{s_1}(u_1)(a_1 - a_2) + \phi_{s_1}(u_1 + u_2)(a_2 - a_3) + \ldots + \phi_{s_1}(1)a_n \\ = & \ \phi_{s_1}(u_1 + u_2)(a_1 - a_3) + \ldots + \phi_{s_1}(1)a_n \\ = & \ V_\xi(\langle(\omega_1 + \omega_2, a_1), (\omega_3, a_3), \ldots, (\omega_n, a_n)\rangle) \end{aligned}$$

であり，bag の要素の統合や分割が可能である．

この性質を利用することにより，ウエイトの意味がはっきりする．$\omega_i, \forall i$ を整数とする．有理数であれば，すべてを定数倍することにより整数化することができる．

$$\begin{aligned} & V_\xi(\langle(\omega_1, a_1), \ldots, (\omega_n, a_n)\rangle) \\ = & \ V_\xi(\langle\overbrace{(1, a_1), \ldots, (1, a_1)}^{\omega_1\text{個}}, \ldots, \overbrace{(1, a_n), \ldots, (1, a_n)}^{\omega_n\text{個}}\rangle) = V_\xi(\langle\overbrace{a_1, \ldots, a_1}^{\omega_1\text{個}}, \ldots, \overbrace{a_n, \ldots, a_n}^{\omega_n\text{個}}\rangle) \end{aligned} \tag{46}$$

となる．したがって，ウエイトは，入力の数を表している．たとえば，$V_\xi(\langle(1, a_1), (3, a_2), (5, a_3)\rangle)$ であれば，a_1 が 1 入力，a_2 が 3 入力，a_3 が 5 入力あること $V_\xi(\langle a_1, a_2, a_2, a_2, a_3, a_3, a_3, a_3, a_3\rangle)$ を示している．

7　おわりに

以上の結果を表 2 にまとめる．

加重平均は，評価項目へのウエイトを表現でき，OWA オペレータは，各評価値への順位によるウエイト，すなわち評価項目間の相互作用を表現できる集計オペレータである．ϕ_s 変換型の集計オペレータは，評価項目へのウエイトと評価項目間の相互作用を表現できる集計オペレータである．また，一般の正規なファジィ測度の場合のパラメータ数 $2^n - 2$ 個に比べ，ϕ_s 変換型の集計オペレータは，n 個という少ない数のパラメータで表現できるという特徴を持っている．また，表 2 で示したように，1 次同次性，一般化ド・モルガン律など集計オペレータとしての多くのよい性質をもっている．

謝辞

本研究の一部は，平成 10 年度専修大学研究助成,「ファジィ測度-ショケ積分モデルの研究」によっている．

表 2: 各集計オペレータの比較

性質	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
ベキ等律	○	○	○	○	○	○	○
連続性	○	○	○	○	○	○	○
最大値と最小値の中間	○	○	○	○	○	○	○
単調増加	○	○	○	○	○	○	○
狭義の単調増加	♠	♢♡	♢	♡	♡		
アフィン変換	○	○	○	○	○	○	○
１次同次性	○	○	○	○	○	○	○
ξ に関する単調性	−	○	○	−	−	−	−
一般化交換律	♠		○	○		○	○
一般化ド・モルガン律	♠	○	○			○	○
一般化クリーネ律	♠		○			○	○
パラメータ							
相互作用の表現	○	○	○	○			
評価項目へのウエイトの表現	♠	○			○		
パラメータ数	$2^n - 2$	n	1	$n-1$	$n-1$	0	0

表 3: 表 2 で使われている番号，記号

番号	記号	集計オペレータ
(1)	$U_\mu(a_1, \ldots, a_n)$	正規なファジィ測度ショケ積分
(2)	$U_\xi^{(\omega_1,\ldots,\omega_n)}(a_1, \ldots, a_n)$	ϕ_s 変換型
(3)	$U_\xi(a_1, \ldots, a_n)$	ϕ_s 変換型 (等ウエイト)
(4)	$U_{\mathrm{OWA}}^{(w_1,\ldots,w_n)}(a_1, \ldots, a_n)$	等ウエイトのファジィ測度 (OWA オペレータ型)
(5)	$U_{0.5}^{(\omega_1,\ldots,\omega_n)}(a_1, \ldots, a_n)$	加重平均
(6)	$U_1(a_1, \ldots, a_n)$	最大値
(7)	$U_0(a_1, \ldots, a_n)$	最小値

記号	意味
○	成立
♢	ϕ_s 変換で $\xi = 0(s = +\infty)$(最小値) と $\xi = 1(s = 0)$(最大値) の場合を除いて成立
♡	ウエイトがすべて 0 でない場合，$w_i > 0, i = 1, \ldots, n$ の場合成立
♢♡	♢ と ♡ の両方の条件が成立する場合成立
♠	特殊なファジィ測度のとき，成立

参考文献

[1] Dubois,D. and H.Prade: A Review of Fuzzy Set Aggregation Connectives,*Information Science*, 69, 85-121,(1985).

[2] Dyckhoff,H. and W.Pedrycz: Generalized Means as Model of Compensative Connectives,*Fuzzy Sets and Systems*,14, 143-154,(1984).

[3] Grabisch,M.: Fuzzy Integral in Multicriteria Decision Making, *Fuzzy Sets and Systems*, 69, 279-298, (1995).

[4] Sugeno, M: *Theory of fuzzy integrals and its applications,* Doctoral Thesis, Tokyo Institute of Technology, 1974.

[5] Yager,R.R.: On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-criteria Decision Making,*IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*,18, 183-190, (1988).

[6] Yager,R. R.: Connectives and Quantifiers in Fuzzy Sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 40, 39-75,(1991).

[7] Yager,R.R.: MAN and MOM Bag Operators for Aggregation,*Information Science*, 69, 259-273,(1993).

[8] 高萩栄一郎, 重みと相互作用を表す関数によるファジィ測度の割り当て, 第 12 回ファジィシステムシンポジウム講演論文集, 日本ファジィ学会,949-952, 東京,(1996).

[9] 高萩栄一郎, 重要度と λ による λ ファジィ測度の同定について, 日本ファジィ学会誌,Vol. 12, No. 5,(2000) (掲載予定).

[10] 塚本弥八郎, 不確実性を伴う意思決定問題のファジィ測度論による分析, ファジィ理論と人文社会科学 (講座ファジィ 14), 日刊工業新聞社,(1994).

[11] 向殿政男, ファジィ論理 (講座ファジィ 4), 日刊工業新聞社,(1993).

[12] 柳井浩, 平均値の意味と構造 I, オペレーションズ・リサーチ, Vol.42,No.3,155-160,(1997).

[13] 柳井浩, 平均値の意味と構造 II, オペレーションズ・リサーチ, Vol.42,No.4,222-226,(1997).