線形微分方程式をグリーン関数法で解く：調和振動子の場合

力学 A（東京大学前期教養課程, 2017), 担当：大井万紀人

目的: 古典力学の例題を用いて、グリーン関数法を理解する。また、関連する数学技法（フーリエ展開や線積分など）の習得も目指す。

[*May. 25, 2017*]

1 線形微分方程式とグリーン関数

前回見たように、線形微分方程式の解が複数見つかった時、その線形結合はさらに新しい解となる。この性質を利用すると、線形微分方程式の解は、グリーン関数と呼ばれる関数の積分によって与えることができる。この問題を適用する例題として、ファインマン物理学の 25 章に習って、強制振動の問題を考えよう。

強制振動の問題を記述する線形な微分方程式は、よく知られているように、次のような形となる。

$$\left(m\frac{d^2}{dt^2}+2m\gamma\frac{d}{dt}+m\omega_0^2\right)x(t)=F(t). \tag{1}$$

強制力／外力 $F(t)$ は次のようにデルタ関数を用いて表すことができる。

$$F(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t')\delta(t'-t)dt'. \tag{2}$$

これは時刻 $t=t'$ における力が撃力（強度は $F(t')$) であり、時間変動する外力 $F(t)$ は、様々な時刻 t' における撃力の「重ね合わせ」として表現できる、という意味である。

もし撃力 $\delta(t'-t)$ に対する（強制振動の）微分方程式の解 $G(t,t')$ がわかるなら、力の場合と同様に、$G(t,t')$ の重ね合わせとして、$F(t)$ に対応する微分方程式の解 $x(t)$ を表すことができる。すなわち

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t')G(t,t')dt'. \tag{3}$$

解に対する、この積分表現を微分方程式に入れてみれば、$G(t,t')$ は撃力に対する微分方程式の解になっていることが確認できる。

$$\left(m\frac{d^2}{dt^2}+2m\gamma\frac{d}{dt}+m\omega_0^2\right)G(t,t')=\delta(t-t'). \tag{4}$$

上の式では δ 関数が偶関数であることを使った。ファインマン風に説明すると、「撃力」に対するこの微分方程式の解 $G(t,t')$ がグリーン関数である。グリーン関数を多体理論や場の理論に応用する際、この「直感的な理解」はとても役にたつ。

2 グリーン関数を求める方法

種々の方法があるようだが、ここではフーリエ変換を用いた方法でグリーン関数を計算してみる。デルタ関数のフーリエ変換はよく知られているように、

$$\delta(t-t')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(t-t')}d\omega \tag{5}$$

である。微分方程式の持つ性質を考えると、$G(t,t')=G(t-t')$ となることがわかるので、グリーン関数のフーリエ変換は

$$G(t-t')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{i\omega(t-t')}d\omega \tag{6}$$

となる。これらのフーリエ変換の積分を微分方程式に代入すると、ω に関しての代数方程式となる。

$$m\left(-\omega^2+2i\omega\gamma+\omega_0^2\right)G(\omega)=1 \tag{7}$$

すなわち、

$$G(\omega)=-\frac{1}{m}\frac{1}{\omega^2-\omega_0^2-2i\gamma\omega}. \tag{8}$$

したがって、

$$G(t-t')=-\frac{1}{m}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega^2-\omega_0^2-2i\gamma\omega}d\omega \tag{9}$$

この複素積分は、線積分と留数定理により計算することができる。

3　複素積分と留数定理

線積分は、力学 A の後半で導入する（３次元のエネルギー積分で、ポテンシャルを導入するときに利用)。また、A セメスターの電磁気学 A でストークスの定理を用いて磁場（静磁場）に関するマクスウェルの方程式のひとつ（アンペールの法則）を導出するときなどで利用する。

複素関数の線積分を本格的に学習するのは複素関数解析においてであるが、今回の流れのように、フーリエ変換やラプラス変換でよく使う。また、量子多体問題や量子場の理論においても、グリーン関数の計算などでよく利用する。

線積分とは、簡単に言うと、積分経路を任意の曲線に拡張した場合の積分であり、特に閉じた経路（ループ）に関しての線積分は周回積分（ループ積分）という。ループ積分の基本は、次の「コーシー・グルサの定理」である。

コーシー・グルサの定理 (Cauchy-Goursat)

複素関数 $f(z)$ は、区分的に滑らかなループ (C と表す) の上およびその内部で正則とする。このとき、

$$\oint_c f(z)dz=0. \tag{10}$$

「コーシーの積分定理」と呼ぶ場合もある。

今回計算したい積分は実軸にそっての区間 $[-\infty,\infty]$ における線積分と解釈することができる。この区間を含むループ C を導入するために、一旦、積分範囲を $[-R,R]$ とし、最後に $R\to\infty$ という極限をとることにする。区間 $[-R,R]$ の両端に、半径 R の半円 C' をつけ、$C=C'+[-R,R]$ と定義する。半円 C' における線積分の向きは「反時計回り」すなわち正の向きとする。

C における周回積分を書き下すと

$$\oint_{C=[-R,R]+C'}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{z^2-\omega_0^2-2i\gamma z}dz=\int_{-R}^{R}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega^2-\omega_0^2-2i\gamma\omega}d\omega+\int_0^{\pi}\frac{e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)(t-t')}}{R^2e^{2i\theta}-\omega_0^2-2i\gamma Re^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta \tag{11}$$

となる。複素積分変数 z は、それぞれの積分区間において書き直すことができる。右辺の第一項では積分範囲が実軸であるので $z\to\omega$ と解析接続される。一方, 第二項では円周上で積分するので $z\to Re^{i\theta}$ となり、積分変数は θ となる。第二項は複雑な積分に見えるが、$R\to\infty$ という極限を取ったときに 0 に収束することを示すことができる。R に関して着目すると、この極限計算で効いてくるのは $e^{-R\sin\theta}/R$ であり、C' 上では $\sin\theta>0$ なので、$R\to\infty$ に対し C' における線積分は 0 となる。

左辺の計算は留数定理によって行う。左辺の被積分関数は C の内部において正則ではなく、値が発散する点、すなわち特異点あるいは極 (pole)、が 2 つ存在する。すなわち、

$$z^2 - \omega_0^2 - 2i\gamma z = 0 \tag{12}$$

を満たす点 $z_n = i\gamma + (-1)^n \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ が極である ($n = 0, 1$)。C の内部に特異点（極）があるのでコーシーグルサの定理は適用できず、ループ積分は non-vanishing な値を持つ。

留数定理

C をループ曲線 (交点のない区分的に滑らかな曲線で、ジョルダン曲線ともいう）とする。複素関数 $f(z)$ は C の内部にある有限個の特異点 z_n の留数を $R(z_n)$ とすると

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_n R(z_n) \tag{13}$$

がなりたつ。

留数とはなにか知らないとこの定理を使うことはできないが、今考えている特異点は「1 位の極」と呼ばれる特異点なので、次の公式により「計算」することができる。ここではそれを天下りに受け入れるとする。

$$R(z_n) = \lim_{z \to z_n} (z - z_0) f(z) \quad \text{...(1 位の極に対する留数)} \tag{14}$$

（留数とは、複素関数 $f(z)$ をローラン級数展開、すなわち、負べきを含むべき級数展開したときの、係数のことである。）

今考えている問題において、z_n の留数の和は

$$R(z_0) + R(z_1) = \frac{i}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma(t-t')} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(t - t')\right) \tag{15}$$

と計算されるから、ループ積分の値は、上の量の $2\pi i$ 倍になる。
以上の結果をまとめると、減衰する調和振動子に対するグリーン関数は

$$G(t - t') = \frac{1}{m\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma(t-t')} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(t - t')\right) \tag{16}$$

という形になることがわかった。

4　グリーン関数による微分方程式の解

時間 t' における撃力に対する強制振動の解（すなわちグリーン関数）がわかったので、この解を線形結合すると、Eq.(2) で表される力 $F(t)$ に対する強制振動の解を計算することができる。

まずは講義でやったように $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ の場合を考えてみよう。グリーン関数による微分方程式の解は、Eq.(3) で与えられるので

$$x(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma(t-t')} \sin(\omega t') \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(t - t')\right) dt' \tag{17}$$

を積分すると得られる。

上の積分の表式で気になるのは、積分区間が無限区間になっていて、そのまま計算したときに果たして有限な値になるかどうかという点である。実際、被積分関数の形をみると減衰を記述する $e^{-\gamma(t-t')}$ の部分は $t' \to +\infty$

で発散するので、積分が有限とならない感じがする。実は、そもそもグリーン関数は、撃力のような短時間だけ作用する外力に対して、考える物理系がどのように応答するかに興味を持って発展した概念であるので、外力が働く以前においては0として定義するのが慣習のようである。

この問題の場合には、

$$
G(t-t') = \begin{cases} \frac{1}{m\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}} e^{-\gamma(t-t')} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}(t-t')\right) & \text{.... } (t > t') \\ 0 & \text{.... } (t \le t') \end{cases} \tag{18}
$$

となる。このタイプのグリーン関数は遅延グリーン関数 (retarded Green's function) という。遅延グリーン関数が、もともとの線形微分方程式の解となっていることは、代入により確認できる。

以上より、遅延グリーン関数による線形微分方程式の表現は次のようになる (積分範囲が変更になったことに注意)。

$$
x(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-t')} \sin(\omega t') \sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}(t-t')\right) dt' \tag{19}
$$

見通しをよくするために $\sin(\omega t') = -\sin(\omega(t-t') - \omega t)$ とし、加法定理を用いて展開し、$t-t'$ に依存する三角関数の部分だけをまとめる。さらに、変数変換 $t - t' = \tau$ を行えば、

$$
\begin{aligned}
x(t) &= -\frac{F_0}{2m\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}} \left\{ \cos(\omega t) \int_{+\infty}^{0} e^{-\gamma\tau} \left(\cos(\omega_+\tau) - \cos(\omega_-\tau)\right) d\tau \right. \\
&\quad \left. + \sin(\omega t) \int_{+\infty}^{0} e^{-\gamma\tau} \left(\sin(\omega_+\tau) - \sin(\omega_-\tau)\right) d\tau \right\}
\end{aligned} \tag{20}
$$

となる。ただし、

$$
\omega_\pm = \omega \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \tag{21}
$$

とした。上の積分を実行するにあたって、つぎの公式が有用である。

$$
\int e^{-\gamma t} e^{i\omega t} dt = \int e^{(-\gamma + i\omega)t} dt = \frac{1}{-\gamma + i\omega} e^{(-\gamma+i\omega)t}. \tag{22}
$$

これにより

$$
\begin{aligned}
x(t) &= -\frac{F_0}{m(\gamma^2+\omega_+^2)(\gamma^2+\omega_-^2)} \left\{ 2\gamma\omega\cos(\omega t) + (\omega^2-\omega_0^2)\sin(\omega t) \right\} \\
&= -\frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2} \left\{ 2\gamma\omega\cos(\omega t) + (\omega^2-\omega_0^2)\sin(\omega t) \right\} \\
&= \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} \sin(\omega t + \delta),
\end{aligned} \tag{23}
$$

ただし位相 δ は

$$
\sin\delta = -\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} \tag{24}
$$

$$
\cos\delta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} \tag{25}
$$

と定義した。

5　一般解

グリーン関数法によって求めた解は、特殊解と見なされる。したがって、一般解は同次方程式の解 $x_0(t)$ とグリーン関数法による解の和となる。すなわち

$$x(t) = x_0(t) + \int_{-\infty}^{t} F(t')G(t-t')dt' \tag{26}$$

が一般解となる。同次線形微分方程式の解法はよく研究されており、有効な系統的手法が数多く存在する。したがって、同次解を得ることはそれほど困難ではない。一方、特殊解を見つける系統的な手段はなく、問題ごとに異なる手法を編み出す必要がある。そういう意味では、グリーン関数法は多少計算が面倒ではあるが、特殊解をある程度「系統的に」探し出す手法として重要な役割を担っている。また、ターゲットとなる物理系に対するグリーン関数を一度計算してしまえば、様々な異なる外力に対してどのような系の応答がなされるか、共通のグリーン関数を用いて繰り返し計算することができるのも利点である。

ちなみに、上の式は、量子力学の散乱問題でよく使用される Lippmann-Schwinger 方程式と同じ形式である。（また、LS 方程式において、散乱の行列要素の 1 次で近似したものはボルン近似として知られ、よく利用される。）簡単な 2 体相互作用をもつシュレディンガー方程式に対するグリーン関数は、J.J.Sakurai で紹介されているように Helmholtz 方程式のグリーン関数と等価であり、それは減衰する球面波と同じ形の関数で表される。