楕円の方程式と２次形式：２次元実対称行列の対角化の意味

力学 A（東京大学前期教養課程, 2017), 担当：大井万紀人

目的: 楕円の方程式を表す２次元の２次形式の「標準形式」、すなわち対角化表現の意味を、より直感的に理解すること。

[*June 10, 2017*]

1　２次形式と楕円の方程式

２次式

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \tag{1}$$

は, (２次元の) ２次形式と呼ばれる。行列を用いて

$$f(x,y) = (xy)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2}$$

と表すこともできる。この式に現れる 2×2 正方行列を, 以下では A と表す。A は実対称行列 $(A^T = A)$ であり, 常に対角化することができる。

$f(x,y) = d$ は円錐曲線を表すが (ただし d は実定数), 楕円になるか, 双曲線になるか, それとも放物線になるかはこの段階ではまだわからない。後でわかるように, A の行列式が正 $(\det(A) > 0)$ のとき楕円に, 負のとき双曲線となる。($\det(A) = 0$ のときは放物線となるそうだが, まだ自分で確認してないので, これ以上踏み込むのはやめておこう。）これは, $a, c > 0$ の場合, 固有値が 2 つとも正, 1 つは正で 1 つは負となる場合にそれぞれ相当している。

2　固有値方程式

もしうまい具合に, ある線形変換 U が見つかって,

$$U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{3}$$

という座標変換をしたら,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (xy)U^T(U^T)^{-1}AU^{-1}U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x'y')(U^T)^{-1}AU^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= (x'y')\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 \\ &\equiv g(x'y'). \end{aligned} \tag{4}$$

というように, ２次形式のクロスターム (xy を含む項のこと）が消えてくれたら便利だろう。A が直交行列の場合, このような一次変換 U を見つけることは可能である。それは A の対角化によって実現することができる。対角化の理論は線形代数で習うはずだから, ここではその詳細は省略する。ここでは実際の対角化の計算を行い, それがどんな計算なのか知ってもらうことを第一の目的としたい。

対角化の第一歩は固有値方程式

$$A\mathbf{v}_i = \lambda \mathbf{v} \tag{5}$$

から始まる。λ が固有値, $\mathbf{v}$ が対応する固有ベクトルである。固有値, 固有ベクトルともに固有値方程式を解くと得ることができる。固有ベクトルは零ベクトルでないとする（さもないと、固有値方程式は自明な結果となってしまう。）このとき, 右辺を左辺に移動すると

$$(A - \lambda I)\,\mathbf{v} = 0 \tag{6}$$

となる。I は単位行列である。もし $A - \lambda I$ が逆行列をもつならば, 固有ベクトルは自明な解、すなわち零ベクトルとなってしまう。前提として固有ベクトルは零ベクトルではない, と定めているので逆行列は存在してはならないという結論になる。したがって、その行列式は零でなくてはならない。

$$|A - \lambda I| = 0 \tag{7}$$

この行列式は λ について 2 次方程式になっているから解の公式によって計算することができる。すなわち行列式は

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow (\lambda - a)(\lambda - b) - b^2 = 0, \text{ or } \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0. \tag{8}$$

となる。これを解くと

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(a + c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}\right). \tag{9}$$

ここで $a, c > 0$ としよう。このとき $a + c > 0$ である。したがって固有値の一つ $(a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2})/2$ は正の実数である。もう一つの固有値が正値をとるならば $a + c > \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}$ でなくてはならないが, これを整理すると $ac - b^2 > 0$, すなわち $\det(A) > 0$ を得る。後で見るように, これは 2 次式 $f(x, y) = d(> 0)$ が楕円の方程式となる条件になっている。

固有ベクトルは, 固有値を固有値方程式に代入することで計算できる。といっても, ベクトルの成分の比までしか求められない。ベクトルを決定するには、通常規格化条件を課す。これは固有ベクトルが単位ベクトルとなるようにその成分を決めることと同じである。固有ベクトルを $(x, y)^T$ で表すことにすると, 固有値方程式の x 成分の関係式から

$$ax + by = \lambda x, \tag{10}$$

規格化条件から

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{11}$$

が得られる。これら 2 つの方程式を連立すると固有ベクトルが求まる。まずは 2 次方程式を解いて得られた固有値の計算結果を最初の式に代入する。ただし以下の計算では簡単のため $b > 0$ を仮定する ($b < 0$ の場合は絶対値をとればよい)。

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2b}\left\{a - c \mp \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}\right\}x \\ &= \left\{-\frac{a-c}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{a-c}{2b}\right)^2 + 1}\right\}x \end{aligned}$$

根号を取って簡単な表式にしたいが, $(a-c)/2b$ は任意の値をとるので, その点も考慮しなくてはならない。ということで

$$\tan\varphi \equiv \frac{a-c}{2b} \tag{12}$$

とおくことにする。$1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x$ を利用すると

$$y/x = \frac{-\sin\varphi \pm 1}{\cos\varphi} \tag{13}$$

を得る。固有ベクトルが直交するように x を選ぶことにすると, 次のような値が許される。

$$
\text{(i)}: \qquad \lambda_0 = \frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2} \text{ の場合,} \quad \mathbf{v}_0 = \mathcal{N}\begin{pmatrix} 1+\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{14}
$$

$$
\text{(ii)}: \qquad \lambda_1 = \frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2} \text{ の場合,} \quad \mathbf{v}_1 = \mathcal{N}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -1-\sin\varphi \end{pmatrix} \tag{15}
$$

$\mathcal{N}$ は共通の規格化因子で

$$
\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{2\,(1+\sin\varphi)}} \tag{16}
$$

となる。２つの固有ベクトルが直交していることは容易に確かめられる。したがって１次独立であり，２次元空間における正規直交基底となっていることがわかる。
ところで

$$
\frac{1+\sin\varphi}{\sqrt{2(1+\sin\varphi)}} = \sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos(\varphi-\frac{\pi}{2})}{2}} = \cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{17}
$$

$$
\frac{\cos\varphi}{\sqrt{2(1+\sin\varphi)}} = \sqrt{\frac{1-\sin^2\varphi}{2(1+\sin\varphi)}} = \sqrt{\frac{1-\sin\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos(\varphi-\frac{\pi}{2})}{2}} = \sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{18}
$$

であるので

$$
\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\ -\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}, \tag{19}
$$

とまとめることができる。
行列の線型性を利用すると, 対角化を可能にする一次変換 U は固有ベクトルを並べて作ることができ,

$$
U = (\mathbf{v}_0\ \mathbf{v}_1) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\varphi-\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{2\varphi-\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{2\varphi-\pi}{4}\right) & -\cos\left(\frac{2\varphi-\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \tag{20}
$$

と表すことができる。また U は, y 軸に関する鏡映反転

$$
\sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{21}
$$

と回転行列 $R((2\varphi-\pi)/4)$ の積で表される。

$$
U = R(\frac{2\varphi-\pi}{4})\sigma_y. \tag{22}
$$

したがって U は直交行列

$$
U^T U = U U^T = I \tag{23}
$$

であるから $U^{-1} = U^T$ である。以上をまとめると, 行列の対角化は

$$
UAU^T = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \tag{24}
$$

となる。

3　楕円の方程式の主軸変換

$a, c > 0$ かつ $\det(A) > 0$ のとき, $\lambda_i > 0$ なので, U によって座標変換したあとの２次形式は

$$
g(x', y') = \lambda_0 x'^2 + \lambda_1 y'^2 \tag{25}
$$

となるので, ２次式 $f(x, y) = d > 0$ に相当する式は

$$
\frac{x'^2}{d/\lambda_0} + \frac{y'^2}{d/\lambda_1} = 1 \tag{26}
$$

となり, 見慣れた楕円の方程式となる。このとき, 座標軸と楕円の主軸の方向は一致している。U が回転と鏡映反転の積で表されることを思い出せば, もともとの座標軸は主軸の方向からずれていたが, 一次変換 U による回転と鏡映反転により, 主軸の方向と座標軸が一致し, その結果クロスタームが消えたことがわかる。