面積速度一定の法則：ケプラーの第二法則

力学 A（東京大学前期教養課程, 2017), 担当：大井万紀人

目的: 面積速度一定の法則を幾何学的に記述する方法の復習

[*June 21, 2017*]

1 中心力と面積速度

ケプラーの第二法則は、「天体の面積速度は一定である」という内容だが、これは作用する力が中心力の場合,角運動量が保存される、という意味である。加速度ベクトルを極座標で記述し、中心力を適用すると、角運動量保存則は

$$mr^2\dot{\theta} = l(= \text{const.}) \tag{1}$$

と表される。

一方で、面積速度 dS/dt は

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = h(= \text{const.}) \tag{2}$$

と表されるが、これを幾何学的に導いて見るのが今回の目的である。ちなみに、角運動量と面積速度は

$$l = 2mh \tag{3}$$

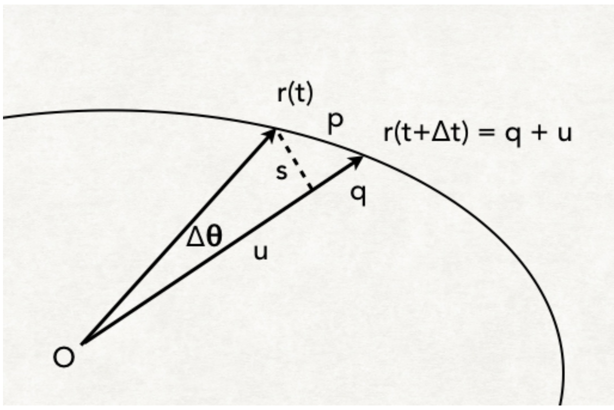
の関係がある。

2 幾何学的な面積速度の導出

軌道を $\mathbf{r}(t)$ で表すことにする。時間 t から時間 $t + \Delta t$ の間の軌道の変化は

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \tag{4}$$

と表される。$0 < \Delta t << 1$ とする。下の図のように、$|\mathbf{r}(t) \equiv r, |\Delta\mathbf{r}| \equiv p, |\mathbf{r}(t + \Delta t)| \equiv r(t + \Delta t) = q + u$ とする。また $\mathbf{r}(t)$ と $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ が微少時間 Δt の間になす微少角度を $\Delta\theta$ とする。



[軌道の描く面積の概念図]

$\mathbf{r}(t)$ の端点から、$\mathbf{r}(t + \Delta t)$ に向かって垂線を下ろし、その交点から原点 O までの長さを u と定義する。したがって、$u = |\mathbf{r}(t + \Delta\ t)| - q$ である。まずは, $\Delta\theta$ の 1 次近似で $u \simeq r$ であることを示す。

厳密には $u = r\cos\Delta\theta$ であるが、$\cos\Delta\theta$ のテイラー（マクローリン）展開により

$$\begin{aligned} u &= r\left(1 - \frac{1}{2!}\Delta\theta^2 + \cdots\right) = r(1 + O(\Delta\theta^2)) \qquad (5)\\ &\simeq r \qquad (6)\end{aligned}$$

である。一方、

$$r(t+\Delta t) = r(t) + \delta r \qquad (7)$$

と表すとすれば、$u \simeq r = r(t)$ だから $\delta r \simeq q$ ということになる。

次に s について考える。$s = r\sin\Delta\theta$ なのでマクローリン展開により

$$\begin{aligned} s &= r\left(\Delta\theta - \frac{1}{3!}\Delta\theta^3 + \cdots\right) = r(\Delta\theta + O(\Delta\theta^3)) \qquad (8)\\ &\simeq r\Delta\theta. \qquad (9)\end{aligned}$$

この量は、半径 r の円周を角度 $\Delta\theta$ だけ切り出した円弧の長さと同じである。したがって、1 次の近似で s は円周の一部であり、u も半径 r の円の半径に同一視することができるということを意味する。このことを計算で確かめてみよう。

まずは、斜辺の長さが r で、その他の辺の長さが s, u の（細長い）直角三角形を考える。この三角形の面積 $\Delta\sigma$ は

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2}us \simeq \frac{1}{2}r(r\sin\Delta\theta) \simeq \frac{1}{2}r^2\Delta\theta \qquad (10)$$

と近似される。したがって、面積速度一定の法則はこの直角三角形の面積の時間変化が一定である、ということになる。

しかし、正確には上で考えた細長い直角三角形と軌道の間の隙間の面積、すなわち斜辺の長さが p、他の辺の長さが s, q の直角三角形で近似される（正確には p は曲線軌道の部分になるから三角形ではない）部分の面積も考慮すべきだろうと思われる。この部分の面積を $\delta\sigma$ とすると

$$\delta\sigma = \frac{1}{2}qs \simeq \frac{1}{2}r\delta r\Delta\theta \qquad (11)$$

と表せる。本来はこの領域についても面積速度を考えるべきなので、$\Delta S = \Delta\sigma + \delta\sigma$ を考慮しなくてはならない。しかし、$\delta\sigma$ は微小量の 2 次の量なので $\Delta\sigma >> \delta\sigma$ とみなし無視することができる。

以上より、微小量の 1 次までの近似で、面積速度は

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} \qquad (12)$$

と表され、角運動量保存則を与えることになる。

3 余談: 微小量による近似の意味

ところで、無視した面積 δs を与える微小直角三角形だが、ピタゴラスの定理が成り立っているから $p^2 = s^2 + q^2$ のはずである。$s = r\sin\Delta\theta \simeq r\Delta\theta,\ q = \delta r$ だから、$p^2 \simeq r^2\Delta\theta^2 + \delta r^2$ である。一方で、同じ量を余弦定理で計算することもできる。

$$\begin{aligned} p^2 &= r^2 + (r+\delta r)^2 - 2r(r+\delta r)\cos\Delta\theta \qquad (13)\\ &= (2r^2 + 2r\delta r)(1 - \cos\Delta\theta) + \delta r^2. \qquad (14)\end{aligned}$$

$\cos\Delta\theta$ を $\Delta\theta^2$ まで近似すると (これは p の近似と考えれば $\Delta\theta$ までの近似に相当する)、

$$\begin{aligned} p^2 &\simeq (2r^2 + 2r\delta r)\frac{1}{2!}\Delta\theta^2 + \delta r^2 &(15)\\ &= (r\Delta\theta)^2 + r\Delta\theta^2\delta r + \delta r^2. &(16) \end{aligned}$$

ピタゴラスの定理からのずれ、すなわち円弧が曲線である効果は微小量の 3 次で表されることがわかる。

ちなみに $\cos\Delta\theta \simeq 1 + O(\Delta\theta^2)$ と近似してみたらどうなるだろうか？式 (14) に代入すると

$$p^2 = \delta r^2, \tag{17}$$

つまり $p = \delta r = q$ となるが、この結果はユークリッド幾何学を破壊してしまう。近似の次数は、よく知られた物理／数学の内容と首尾一貫するように、注意深く選ぶ必要がある。